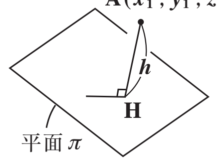
補充問題 3　● 点と平面の間の距離 ●

右図に示すように，平面 π : $ax+by+cz+d=0$ と，平面 π 上にない点 $A(x_1, y_1, z_1)$ がある。このとき，点 A と平面 π との間の距離 h は，次の公式

$$h = \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad \cdots\cdots(*)$$

で求められる。



公式 $(*)$ を使って，次の各場合の点と平面との間の距離を求めよ。

(1) 平面 π_1 : $2x-y+2z-1=0$，点 $A_1(1, -2, 0)$

(2) 平面 π_2 : $x+2y-3z-2=0$，点 $A_2(-3, 2, 2)$

ヒント！ 証明は省略するけれども，$(*)$ の公式も空間図形の様々な問題を解く上でとても役に立つ公式なので，まずこの公式を利用してみよう。

解答＆解説

(1) 平面 π_1 : $\underbrace{2}_{a}\cdot x\underbrace{-1}_{b}\cdot y+\underbrace{2}_{c}\cdot z\underbrace{-1}_{d}=0$ ……① と，

点 $A_1(\underbrace{1}_{x_1}, \underbrace{-2}_{y_1}, \underbrace{0}_{z_1})$ との間の距離を h_1 とおくと，

$A_1(1, -2, 0)$ を①の左辺に代入すると，
$2\cdot 1-1\times(-2)+\cancel{2\cdot 0}-1=3\neq 0$
となって①をみたさない。よって，A_1 は平面 π_1 上の点ではない。

$(*)$ の公式より，

$$h_1=\frac{|2\cdot 1-1\times(-2)+\cancel{2\cdot 0}-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}$$

公式 : $h=\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$$=\frac{|2+2-1|}{\sqrt{9}}=\frac{3}{3}=1$$ となる。……(答)

(2) 平面 π_2 : $\underbrace{1}_{a}\cdot x+\underbrace{2}_{b}\cdot y\underbrace{-3}_{c}\cdot z\underbrace{-2}_{d}=0$ ……②と，

点 $A_2(\underbrace{-3}_{x_1}, \underbrace{2}_{y_1}, \underbrace{2}_{z_1})$ との間の距離を h_2 とおくと，

$A_2(-3, 2, 2)$ を②の左辺に代入すると，
$-3+4-6-2=-7\neq 0$
となって，②をみたさない。よって，A_2 は平面 π_2 上の点ではない。

$$h_2=\frac{|1\cdot(-3)+2\cdot 2-3\cdot 2-2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}}=\frac{|-3+4-6-2|}{\sqrt{1+4+9}}$$

$$=\frac{|-7|}{\sqrt{14}}=\frac{7}{\sqrt{14}}$$

分子・分母に $\sqrt{14}$ をかけて

$$=\frac{7\sqrt{14}}{14}=\frac{\sqrt{14}}{2}$$ となる。…………(答)