(2) の参考

(2) の相加・相乗平均の問題は，式の最大値・最小値の問題として改題することもできる。次の例題を解いてみよう。

(*ex*) $x>0$，$y>0$ のとき，$p=\dfrac{xy}{y^2+4x^2}$ ……①の最大値を求めよう。

①の右辺の分子・分母を $xy\,(>0)$ で割ると，

$$p=\frac{1}{\frac{y^2+4x^2}{xy}}=\frac{1}{\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}}\ \cdots\cdots ①'\ \text{となる。}$$

分母が最小となるとき，この①′は最大となる。

$$\frac{1}{\boxed{\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}}}$$

最大

最小

$x>0$，$y>0$ より，①′の右辺の分母に相加・相乗平均の不等式を用いると，

$$\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\geqq 2\sqrt{\frac{\cancel{y}}{\cancel{x}}\cdot\frac{4\cancel{x}}{\cancel{y}}}=2\sqrt{4}=4$$

$\dfrac{y}{x}+\dfrac{4x}{y}\geqq 4$ より，この4が $\dfrac{y}{x}+\dfrac{4x}{y}$ の最小値だね。

等号成立条件：$\dfrac{y}{x}=\dfrac{4x}{y}$ より，

$y^2=4x^2$　$y=\pm 2x$　ここで，$x>0$，$y>0$ より，$\underline{y=2x}$

つまり，この半直線 $y=2x\,(x>0)$ 上の点であれば，この分母は最小値4となり，p は最大となる。

以上より，①，すなわち①′の p は，$y=2x\,(x>0)$ のとき，

最大値 $p=\dfrac{1}{\boxed{4}}$ をとる。 最小値

練習問題 15　不等式の証明 (Ⅱ)　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

すべての実数 x，y に対して，不等式 $|2x|+|y|\geqq|2x+y|$ ……$(*)$ が成り立つことを示せ。

$|2x|+|y|\geqq|2x+y|$ ……$(*)$ の両辺は共に0以上なので，両辺を2乗した $(|2x|+|y|)^2\geqq|2x+y|^2$ を示しても，$(*)$ を証明したことになるんだね。

$|2x|+|y|\geqq|2x+y|$ ……$(*)$ を示す。

$(*)$ の両辺は共に0以上なので，

$(|2x|+|y|)^2\geqq|2x+y|^2$ ……$(**)$

を示せばよい。

$a\geqq 0$，$b\geqq 0$ のとき，$a\geqq b \Longleftrightarrow a^2\geqq b^2$ となる。よって，$a^2\geqq b^2$ を示せば，$a\geqq b$ を示したのと同じだね。

ここで，一般に $|a|^2=a^2$ であることを用いると，

$|a| = \begin{cases} a & (a \geqq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ だから，

(ⅰ) $a \geqq 0$ のとき，$|a| = a$ から，$|a|^2 = a^2$ だね。また，

(ⅱ) $a < 0$ のときも，$|a| = -a$ から，$|a|^2 = (-a)^2 = a^2$ となる。

よって，(ⅰ) $a \geqq 0$，(ⅱ) $a < 0$ のいずれもの場合でも，$|a|^2 = a^2$ と変形できる！

$((**)$ の左辺$) - ((**)$ の右辺$) = (|2x| + |y|)^2 - |2x + y|^2$

$= \underbrace{|2x|^2}_{(2x)^2} + 2\underbrace{|2x| \cdot |y|}_{2|x|\cdot|y| = 2|x\cdot y|} + \underbrace{|y|^2}_{y^2} - \underbrace{|2x+y|^2}_{(2x+y)^2}$ 　$|a|^2 = a^2$ を使った！

$= 4x^2 + 4|xy| + y^2 - (2x+y)^2$

$= \cancel{4x^2} + 4|xy| + \cancel{y^2} - (\cancel{4x^2} + 4xy + \cancel{y^2})$

$= 4|xy| - 4xy = 4(|xy| - xy)$

ここで，$|a| \geqq a$ の公式が使えるので，

$|xy| \geqq xy$，すなわち，$|xy| - xy \geqq 0$ となる。

よって，$((**)$ の左辺$) - ((**)$ の右辺$)) = 4\underbrace{(|xy| - xy)}_{0 \text{ 以上}} \geqq 0$ となる。

以上より，すべての実数 x，y に対して，

$(|2x| + |y|)^2 \geqq |2x + y|^2 \cdots\cdots(**)$

すなわち，$|2x| + |y| \geqq |2x + y| \cdots\cdots(*)$ は成り立つ。

フ〜，疲れたって？ そうだね。特に最後の練習問題 **15** の証明は，いろんな要素が入ってたから，大変だったと思う。だから，**1** 回ですべて理解しようとするのではなく，何回か繰り返し練習しながら，マスターしていけばいいんだよ。はじめに，「初心者にとって，証明問題は難しい」と言ったけど，実は「上級者になっても，やっぱり証明問題は難しい」ものなんだよ。でも，良問を繰り返し自力で解く訓練を積み重ねることによって，どんどん上手になっていくから，心配せずにシッカリ練習していってくれ。

今日も，みんなよく頑張ったね。実は，今日の講義で**1** つの大きなテーマ“**方程式・式と証明**”が終了したんだよ。そして，次回からは新たなテーマ“**図形と方程式**(ずけい ほうていしき)”に入ろう。これがまた，受験では最重要テーマの **1** つだから，力を入れて教えるつもりだ。もちろん分かりやすくね。

それじゃ，みんな元気で！ 次回の講義まで，さようなら…。