

● 三角比と図形の応用問題にチャレンジしよう！

以上で、三角比と図形の4つのテーマについての解説が終わったんだよ。
もう1度、4つの公式：

正弦定理，余弦定理，三角形の面積，内接円の半径

が，頭の中に定着しているかどうか確認してくれ。大丈夫？

よし，それじゃ，これらの公式を使う応用問題にチャレンジしてみよう！
難しいかも知れないけれど，これで確実に実力がアップするよ。

練習問題 32

三角比と図形 (I)

CHECK 1

CHECK 2

CHECK 3

△ABC について， $AB = 4$ ， $BC = 2$ ， $CA = 3$ であるとき，

- (1) $\cos A$ と $\sin A$ を求めよ。
- (2) △ABC の面積 S を求めよ。
- (3) △ABC の内接円の半径 r を求めよ。

(1) では△ABC の3辺の長さが分かっているので，余弦定理 (II) を用いて $\cos A$ を求め，そして $\sin A$ も求めよう。(2) では，三角形の面積の公式を使う。そして(3) では，内接円の半径 r を求める公式を利用しよう。解法の流れに乗って解いていくのがポイントだ！

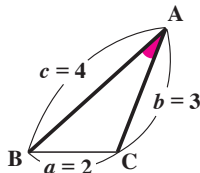
- (1) 右図より， $c = AB = 4$ ， $a = BC = 2$ ， $b = CA = 3$

と，△ABC の3辺の長さが与えられているので，

△ABC に余弦定理 (II) を用いて， $\cos A$ を求めると，

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} \quad \leftarrow \begin{array}{c} \text{余弦} \\ \text{定理 (II)} \end{array}$$

$$= \frac{9 + 16 - 4}{24} = \frac{21}{24} \quad \therefore \cos A = \frac{7}{8}$$



$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ より，

$$\sin^2 A = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2 = 1 - \frac{49}{64} = \frac{64 - 49}{64} = \frac{15}{64}$$

$\sin A$ の値を求めたら，面積 $S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A$ の公式が使えるようになるんだね。

ここで、 $0 < \angle A < 180^\circ$ より、 $\sin A > 0$ だから、

$$\sin A = \sqrt{\frac{15}{64}} = \frac{\sqrt{15}}{8} \dots\dots ①$$

$\sin A = -\sqrt{\frac{15}{64}}$ は考えなくていい!

(2) 次に $\triangle ABC$ の面積 S を求める。①より、

$$S = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{b}_{(3)} \cdot \underbrace{c}_{(4)} \cdot \underbrace{\sin A}_{\left(\frac{\sqrt{15}}{8}\right)} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{3\sqrt{15}}{4} \text{ となる。}$$

$\triangle ABC$ の面積 S は
 $S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A$

さァ、面積 S と 3 辺の長さ a, b, c が分かったから、いよいよ $\triangle ABC$ の内接円の半径 r を求めることができるね。

(3) $\triangle ABC$ の内接円の半径を r とおくと、公式を用いて、

$$S = \frac{1}{2} (\underbrace{a}_{(2)} + \underbrace{b}_{(3)} + \underbrace{c}_{(4)}) \cdot r \text{ より、}$$

$$\frac{3\sqrt{15}}{4}$$

$$\frac{3\sqrt{15}}{4} = \frac{1}{2} (2 + 3 + 4) \cdot r \quad \frac{3\sqrt{15}}{4} = \frac{9}{2} r$$

$$\therefore \text{内接円の半径 } r = \frac{3\sqrt{15}}{4} \times \frac{2}{9} = \frac{\sqrt{15}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{15}}{6} \text{ となるんだね。}$$

どう? 解法の流れをうまくつかめた? それじゃ、もう 1 題やってみよう!

練習問題 33

三角比と図形 (II)

CHECK 1

CHECK 2

CHECK 3

$\triangle ABC$ の頂点 A, B, C の対辺をそれぞれ、 a, b, c とする。

$\angle A = 45^\circ$, $b = \sqrt{3} + 1$, $c = \sqrt{2}$ のとき、 $a, \angle C, \angle B$ をこの順に求めよ。

a を余弦定理、 $\angle C$ を正弦定理で求めればいいね。