

方程式 $2|x| + |x-1| = 4$ ……① を解け。

ヒント! ①には、絶対値の付いた 2 つの式 $|x|$ と $|x-1|$ が含まれるので、
(i) $x < 0$, (ii) $0 \leq x < 1$, (iii) $1 \leq x$ の 3 通りに場合分けして解く必要があるんだね。

解答&解説

$2|x| + |x-1| = 4$ ……① について、

(i) $x < 0$, (ii) $0 \leq x < 1$, (iii) $1 \leq x$

に場合分けして解くと、

(i) $x < 0$ のとき、①は、

$$\begin{aligned}
 & 2|x| + |x-1| = 4 \\
 & \underbrace{2(-x)}_{(-x)} + \underbrace{|x-1|}_{-(x-1)} = 4 \\
 & -2x - x + 1 = 4 \text{ より,} \\
 & -3x = 3 \quad \therefore \underline{x = -1} \\
 & \text{(これは、} x < 0 \text{ をみたらす。)}
 \end{aligned}$$

(ii) $0 \leq x < 1$ のとき、①は、

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{2x}_{0 \text{ 以上}} + \underbrace{|x-1|}_{-(x-1)} = 4 \quad 2x - x + 1 = 4 \quad \therefore x = 3 \\
 & \text{これは、} 0 \leq x < 1 \text{ をみたらさない。よって、不適。}
 \end{aligned}$$

(iii) $1 \leq x$ のとき、①は、

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{2x}_{0 \text{ 以上}} + \underbrace{|x-1|}_{x-1} = 4 \quad 2x + x - 1 = 4 \quad 3x = 5 \quad \therefore \underline{x = \frac{5}{3}} \\
 & \text{(これは、} 1 \leq x \text{ をみたらす。)}
 \end{aligned}$$

以上 (i)(ii)(iii) より、①の解は、 $x = -1, \frac{5}{3}$ である。……………(答)

$|x| = \begin{cases} -x & (x < 0) \\ x & (0 \leq x) \end{cases}$

$|x-1| = \begin{cases} -(x-1) & (x < 1) \\ x-1 & (1 \leq x) \text{ より,} \end{cases}$

(i) $x < 0$ のとき、 $\begin{cases} |x| = -x \\ |x-1| = -(x-1) \end{cases}$

(ii) $0 \leq x < 1$ のとき、 $\begin{cases} |x| = x \\ |x-1| = -(x-1) \end{cases}$

(iii) $1 \leq x$ のとき、 $\begin{cases} |x| = x \\ |x-1| = x-1 \end{cases}$