◆◆◆ Appendix(付録) ◆◆◆

補充問題 1 ● 数と式 ●

$x=\sqrt{4+\sqrt{7}}$, $y=\sqrt{4-\sqrt{7}}$ のとき，次の各式の値を求めよ。

(i) $x+y$ (ii) xy (iii) x^2+y^2 (iv) x^3+y^3

ヒント！ まず，$x=\sqrt{\dfrac{8+2\sqrt{7}}{2}}$，$y=\sqrt{\dfrac{8-2\sqrt{7}}{2}}$ として，2 重根号をはずそう。後は，基本対称式と対称式の関係を利用すればいいんだね。

解答＆解説

たして $7+1$　かけて 7×1

$$\cdot\ x=\sqrt{4+\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{8+2\sqrt{7}}{2}}=\sqrt{\frac{\boxed{8}+2\sqrt{\boxed{7}}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{1}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{2}}\quad\cdots\cdots①$$

たして　かけて

$$\cdot\ y=\sqrt{4-\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{8-2\sqrt{7}}{2}}=\sqrt{\frac{\boxed{8}-2\sqrt{\boxed{7}}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{2}}\quad\cdots\cdots②$$ となる。

2 重根号のはずし方

- $\sqrt{\underbrace{a+b}_{\text{たして}}+2\sqrt{\underbrace{ab}_{\text{かけて}}}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$
- $\sqrt{\underbrace{a+b}_{\text{たして}}-2\sqrt{\underbrace{ab}_{\text{かけて}}}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

$(a>b>0)$

(i) ①，②より，$x+y=\dfrac{\sqrt{7}+\cancel{1}}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{7}-\cancel{1}}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{2}}=\sqrt{14}$ …………③ …(答)

(ii) ①，②より，$x\cdot y=\dfrac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{7})^2-1^2}{2}=\dfrac{7-1}{2}=3$ …④ …(答)

(iii) ③，④の基本対称式を用いて，

$$x^2+y^2=\underbrace{(x+y)}_{\sqrt{14}\ (③より)}{}^2-2\underbrace{xy}_{3\ (④より)}=14-6=8\quad\cdots\cdots(答)$$

基本対称式と対称式

- $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
- $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

(iv) ③，④の基本対称式を用いて，

$$x^3+y^3=\underbrace{(x+y)}_{\sqrt{14}}{}^3-3\underbrace{xy}_{3}\cdot\underbrace{(x+y)}_{\sqrt{14}}$$

$$=(\sqrt{14})^3-3\times3\times\sqrt{14}=14\sqrt{14}-9\sqrt{14}=(14-9)\sqrt{14}=5\sqrt{14}$$

……(答)