$n = k+1$ のとき，

$(*3)$ の左辺 $= \underbrace{1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3}_{\frac{1}{4}k^2\cdot(k+1)^2\ (①より)} + (k+1)^3$

①は仮定した式なので，$n=k+1$ のときの証明に使える！

$= \frac{1}{4}k^2(k+1)^2 + \underbrace{(k+1)^3}_{\frac{1}{4}(k+1)^2\cdot 4(k+1)}$ （①より）

$= \frac{1}{4}(k+1)^2\{\underbrace{k^2+4(k+1)}_{k^2+4k+4=(k+2)^2}\}$

$\frac{1}{4}(k+1)^2$ をくくり出した！

$= \frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2$

$= \frac{1}{4}(k+1)^2(k+1+1)^2 = (*3)$ の右辺

これで，(ii) $k+1$ 番目のドミノも倒した！バンザーイ！！

$\therefore$ $n=k+1$ のときも，$(*3)$ は成り立つ。

以上(i)(ii)より，すべての自然数 n に対して $(*3)$ は成り立つ。

どう？数学的帰納法を使えば，Σ 計算の重要公式もアッサリ証明できることが分かっただろう。

ン？数学的帰納法による証明は分かったけれど，どのようにして，公式：$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ や $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ が導き出されるのかを知りたいって!? 向学心旺盛だね。今のキミなら理解できるだろうから，これらの公式も参考として導いてみせてあげよう。

参考

(I) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ ……$(*1)$ の導出について，まず次の Σ 計算

$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^2-k^2\}$ ……① を考えてみよう。

(ⅰ) ①を実際に計算してみると，

$$\sum_{k=1}^{n}\{\underbrace{(k+1)^2-k^2}_{\cancel{k^2}+2k+1-\cancel{k^2}=2k+1}\}=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=2\sum_{k=1}^{n}k+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}1}_{1+1+\cdots+1=n\cdot 1=n}$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}k+n \quad\cdots\cdots①'$$ となる。

(ⅱ) 次に，①について，$I_k=k^2$，$I_{k+1}=(k+1)^2$ とおくと，

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^2-k^2\}=\sum_{k=1}^{n}(I_{k+1}-I_k)=-\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(I_k-I_{k+1})}_{(I_1-\cancel{I_2})+(\cancel{I_2}-\cancel{I_3})+(\cancel{I_3}-\cancel{I_4})+\cdots+(\cancel{I_n}-I_{n+1})}$$

$$=-(I_1-I_{n+1})=I_{n+1}-I_1=\underbrace{(n+1)^2-1^2}_{n^2+2n+\cancel{1}-\cancel{1}=n^2+2n}=n^2+2n \quad\cdots\cdots①''$$

が導ける。

ここで，①′と①″は等しいので，

$2\sum_{k=1}^{n}k+n=n^2+2n$ より，$2\sum_{k=1}^{n}k=n^2+n=n(n+1)$

∴公式：$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$ …$(*1)$ が導けるんだね。大丈夫だった？

(Ⅱ) $\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ ……$(*3)$

の導出についても，

$$\sum_{k=1}^{n}\{\underbrace{(k+1)^4}_{J_{k+1}}-\underbrace{k^4}_{J_k}\} \quad\cdots②$$ を考える。

> ここで，
> $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$……………$(*1)$ と
> $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$…$(*2)$
> は既知とする。
> ($(*2)$ の証明は P29 を参照)

これを 2 通りで計算してみると，

> パスカルの三角形
> 1 1
> 1 2 1
> 1 3 3 1
> 1 4 6 4 1

(ⅰ) $\sum_{k=1}^{n}\{\underbrace{(k+1)^4-k^4}_{\cancel{k^4}+4k^3+6k^2+4k+1-\cancel{k^4}=4k^3+6k^2+4k+1}\}$

$$=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\underbrace{\sum_{k=1}^{n}k^2}_{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\ ((*2)\text{より})}+4\underbrace{\sum_{k=1}^{n}k}_{\frac{1}{2}n(n+1)\ ((*1)\text{より})}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}1}_{n}$$

$$=4\sum_{k=1}^{n}k^3+\underbrace{n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)+n}_{n(2n^2+3n+1)+2n^2+2n+n=2n^3+5n^2+4n}$$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^4-k^4\}=4\sum_{k=1}^{n}k^3+2n^3+5n^2+4n$ …②´ が導けるんだね。

(ii) 次に，$J_k=k^4$，$J_{k+1}=(k+1)^4$ とおいて②を計算すると，

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^4-k^4\}=\sum_{k=1}^{n}(J_{k+1}-J_k)=-\sum_{k=1}^{n}(J_k-J_{k+1})$$

$$=-\{(J_1-\cancel{J_2})+(\cancel{J_2}-\cancel{J_3})+(\cancel{J_3}-\cancel{J_4})+\cdots+(\cancel{J_n}-J_{n+1})\}$$

$$=-(J_1-J_{n+1})=J_{n+1}-J_1=\underbrace{(n+1)^4}_{\boxed{n^4+4n^3+6n^2+4n+\cancel{1}}}-\cancel{1^4}$$

$$=n^4+4n^3+6n^2+4n$$ ……②´´ となる。

以上 (i)(ii) より，②´ と②´´ は等しいので，

$$4\sum_{k=1}^{n}k^3+2n^3+5n^2+\cancel{4n}=n^4+4n^3+6n^2+\cancel{4n}$$

$$4\sum_{k=1}^{n}k^3=n^4+4n^3+6n^2-2n^3-5n^2$$

$$=n^4+2n^3+n^2=n^2(n^2+2n+1)=n^2(n+1)^2$$ となる。

よって，$4\sum_{k=1}^{n}k^3=n^2(n+1)^2$ より，

$\therefore$ 公式：$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ …(＊3) も導けるんだね。面白かった？

それでは，数学的帰納法に話を戻して，もう 1 題，問題を解いておこう。

練習問題 17	数学的帰納法 (Ⅲ)	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

すべての自然数 n に対して，「$2^{3n}-3^n$ は 5 の倍数である。 …(＊4)」が成り立つことを，数学的帰納法を使って証明せよ。

たしかに，$n=1$ のとき $2^3-3^1=8-3=5$，$n=2$ のとき $2^6-3^2=64-9=55$ となって，5 の倍数なのは分かるね。でも，$n=3$，4，5，6，… のすべての自然数 n に対して $2^{3n}-3^n$ が 5 の倍数であることを示すには，数学的帰納法しかないんだね。少し難しいかも知れないけど，これでさらに理解が深まるよ。