補充問題 1　Σ計算　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

数列 $\{a_n\}$ の一般項 $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ ……① $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ について，次の問いに答えよ。

(1) ①より，$a_n = \dfrac{1}{2}(I_n - I_{n+1})$ と変形できることを示せ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ。

ヒント！ (1) $a_n = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n(n+1)} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$ と変形できる。

解答＆解説

(1) ①を変形すると，

$$a_n = \frac{1}{2} \times \frac{\overset{(n+2)-n}{2}}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{(n+2)-n}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\cancel{(n+2)}}{n(n+1)\cancel{(n+2)}} - \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(n+1)(n+2)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\underbrace{\frac{1}{n(n+1)}}_{I_n} - \underbrace{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}_{I_{n+1}}\right\} \text{ となる。}$$

$a_n = \dfrac{1}{2}\left\{\underbrace{\dfrac{1}{n(n+1)}}_{I_n} - \underbrace{\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}}_{I_{n+1}}\right\}$

と変形できて，

$I_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ とおくと，

$I_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)(n+1+1)}$

$= \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ となる。

$\therefore I_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ とおくと，$I_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ より，

$a_n = \dfrac{1}{2}(I_n - I_{n+1})$ ……② となる。 ……………………………(終)

(2) ②より，

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(I_k - I_{k+1}) = \frac{1}{2}\{\underbrace{(I_1 - \cancel{I_2})}_{k=1} + \underbrace{(\cancel{I_2} - \cancel{I_3})}_{k=2} + \cdots + \underbrace{(\cancel{I_n} - I_{n+1})}_{k=n\text{ のとき}}\}$$

$$= \frac{1}{2}(I_1 - I_{n+1}) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{(n+1)(n+2)-2}{2(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+3n+\cancel{2}-\cancel{2}}{4(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} \text{ となる。}$$ ……………………………(答)