補充問題 1　●不確定性原理と原子の直径●

直径が a(m) の原子中にある電子の運動エネルギーの平均 E が，
$E = 2.42\times10^{-18}$(J) であるとき，不確定性原理から，近似式：
$\varDelta x\cdot\varDelta p \fallingdotseq \hbar$ ……(∗)$\left(\varDelta x \fallingdotseq \dfrac{a}{2}\right)$ が成り立つものとして直径 a の近似値を求めよ。(ただし $\hbar = 1.05\times10^{-34}$(J·s)，電子の質量 $m = 9.1\times10^{-31}$(kg)，x と p はそれぞれ電子の位置と運動量を表すものとする。)

ヒント！ $<x> = <p> = 0$，$\varDelta p = \sqrt{<p^2> - <p>^2}$ などの式から解いていけばいいんだね。

解答＆解説

電子は，原子の原子核を中心に運動していると考えられるので，原子核の位置を原点 **0** とすると，電子の位置 x と運動量 p の平均は共に **0** となる。
よって，$<x> = 0$ と $<p> = 0$ ……①
次に，x のバラツキを $\varDelta x$ とおくと，これは題意より原子の半径 $\dfrac{a}{2}$ で近似できるので $\varDelta x \fallingdotseq \dfrac{a}{2}$ ……② となる。②を不確定性原理を表す式(∗)に代入すると，

$\dfrac{a}{2}\cdot\varDelta p \fallingdotseq \hbar$ より，$\varDelta p \fallingdotseq \dfrac{2\hbar}{a}$ ……(∗)′ となる。

$\sigma p = \sqrt{E[p^2] - E[p]^2}$

また p のバラツキ $\varDelta p$ は，$\varDelta p = \sqrt{<p^2> - \underbrace{\cancel{<p>^2}}_{0^2\,(①より)}}$ より，

p^2 の平均 $<p^2>$ は $<p^2> = (\varDelta p)^2$ ……③ となる。③に(∗)′を代入して，
$<p^2> \fallingdotseq \dfrac{4\hbar^2}{a^2}$ ……④ となる。よって，電子の運動エネルギーの平均 E は，

$E = \dfrac{<p^2>}{2m}$ ……⑤ とおけるので，⑤に④を代入して，

$E \fallingdotseq \dfrac{1}{2m}\cdot\dfrac{4\hbar^2}{a^2} = \dfrac{2\hbar^2}{ma^2}$ 　$\therefore\ a \fallingdotseq \sqrt{\dfrac{2\hbar^2}{mE}}$ ……⑥ となる。

⑥に $\hbar$ と m と E の値を代入すると，原子の直径 a は近似的に，

$a \fallingdotseq \sqrt{\dfrac{2\times(1.05\times10^{-34})^2}{9.1\times10^{-31}\times2.42\times10^{-18}}} = 1.00\times10^{-10}(\mathrm{m}) = 1.00(\text{Å})$ となる。…(答)