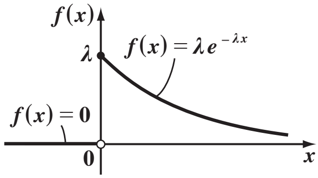
補充問題 3　● 指数分布の期待値と分散 ●

指数分布 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & (x \geqq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$ ……(＊)（λ：正の定数）の期待値 μ と分散 σ^2 を公式：$\mu=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)dx$ …①，$\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot f(x)dx-\mu^2$ …② を用いて求めよ。

ヒント！ 演習問題 **23(P40)** で，この指数分布の期待値 μ と分散 σ^2 が $\mu=\dfrac{1}{\lambda}$，$\sigma^2=\dfrac{1}{\lambda^2}$ となることは，積率母関数 $M(\theta)$ を使って既に求めているが，ここでは①と②の公式から同じ結果が得られることを確認してみよう。

解答＆解説

(＊)の指数分布の確率密度 $f(x)$ より，この期待値 μ と分散 σ^2 を①と②の公式を用いて求める。



(i) $\mu=E[X]=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx}_{\cancel{\int_{-\infty}^{0}x\cdot 0\,dx}+\int_0^{\infty}x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx}$

$$=-\int_0^{\infty}x\cdot\underbrace{(e^{-\lambda x})'}_{(-\lambda e^{-\lambda x})}dx$$

部分積分法
$$\int_0^{\infty}f\cdot g'dx=[f\cdot g]_0^{\infty}-\int_0^{\infty}f'\cdot g\,dx$$

$$=-\left\{\underbrace{\cancel{[xe^{-\lambda x}]_0^{\infty}}}_{}-\underbrace{\int_0^{\infty}1\cdot e^{-\lambda x}dx}_{}\right\}$$

$$\lim_{a\to\infty}\left[\frac{x}{e^{\lambda x}}\right]_0^a=\lim_{a\to\infty}\Big(\underbrace{\frac{a}{e^{\lambda a}}}_{0}-0\Big)=0$$

$$\lim_{a\to\infty}\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^a=\lim_{a\to\infty}\Big(\underbrace{\cancel{-\frac{1}{\lambda e^{\lambda a}}}}_{0}+\frac{1}{\lambda}\Big)=\frac{1}{\lambda}$$

$$=-\left(0-\frac{1}{\lambda}\right)=\frac{1}{\lambda}$$ ……③ となる。……………………………（答）

(ii) $\sigma^2 = V[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx}_{\boxed{\cancel{\int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0\,dx} + \int_0^{\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx}} - \underbrace{\mu^2}_{\boxed{\frac{1}{\lambda^2}\ \left(\mu = \frac{1}{\lambda} \cdots ③より\right)}}$

$$= -\underbrace{\int_0^{\infty} x^2 \cdot (e^{-\lambda x})' dx}_{\boxed{\begin{aligned} &\left[x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 2xe^{-\lambda x} dx \quad (\text{部分積分}) \\ &= \lim_{a\to\infty}\left[\frac{x^2}{e^{\lambda x}}\right]_0^a - 2\int_0^{\infty} x\left(-\frac{1}{\lambda}\right)(e^{-\lambda x})' dx \\ &= \cancel{\lim_{a\to\infty}\Big(\underbrace{\frac{a^2}{e^{\lambda a}}}_{0} - 0\Big)} + \frac{2}{\lambda}\int_0^{\infty} x(e^{-\lambda x})' dx \end{aligned}}} - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$= -\frac{2}{\lambda}\underbrace{\int_0^{\infty} x \cdot (e^{-\lambda x})' dx}_{\boxed{\begin{aligned} &\left[x \cdot e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-\lambda x} dx \quad (\text{部分積分}) \\ &= \left[\frac{x}{e^{\lambda x}}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{e^{\lambda x}}\right]_0^{\infty} = \lim_{a\to\infty}\left[\frac{x}{e^{\lambda x}}\right]_0^a + \frac{1}{\lambda} \cdot \lim_{a\to\infty}\left[\frac{1}{e^{\lambda x}}\right]_0^a \\ &= \lim_{a\to\infty}\Big(\underbrace{\cancel{\frac{a}{e^{\lambda a}}}}_{0} - 0\Big) + \frac{1}{\lambda} \cdot \lim_{a\to\infty}\Big(\underbrace{\cancel{\frac{1}{e^{\lambda a}}}}_{0} - 1\Big) = -\frac{1}{\lambda} \end{aligned}}} - \frac{1}{\lambda^2}$$

$= -\frac{2}{\lambda} \cdot \left(-\frac{1}{\lambda}\right) - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$ となる。 ……………………………(答)

結果は既に分かってはいたんだけれど，今回は積率母関数を使わずに，公式：$\mu = E[X]$ と $\sigma^2 = E[X^2] - E[X]^2 = E[X^2] - \mu^2$ を用いて同じ結果を導いたんだね。良い計算練習になったでしょう？