◆◆◆ Appendix(付録) ◆◆◆

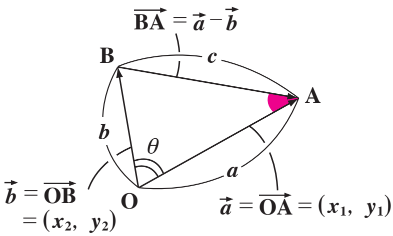
補充問題 1 ● 内積の成分表示●

xy 座標平面上に，3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ があり，
$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(x_1,\ y_1)$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(x_2,\ y_2)$ とおく。このとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積
$\vec{a}\cdot\vec{b}$ が，$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$ ……(＊) と表されることを示せ。

ヒント！ $\triangle\mathrm{OAB}$ についての余弦定理 $\mathrm{AB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\theta$ ($\theta=\angle\mathrm{AOB}$) を利用して，$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\theta=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\vec{a}\cdot\vec{b}$ となることに気付けばいいんだね。

解答＆解説

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(x_1,\ y_1)$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(x_2,\ y_2)$，
$\angle\mathrm{AOB}=\theta$，また $a=|\vec{a}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$，
$b=|\vec{b}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$，$c=|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|$ とおく。
$\triangle\mathrm{OAB}$ に余弦定理を用いると，
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$ ……① となる。
ここで，



[余弦定理：$c^2=a^2+b^2-2\underbrace{ab\cos\theta}_{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\vec{a}\cdot\vec{b}}$]

・$c^2=|\underbrace{\overrightarrow{\mathrm{BA}}}_{\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(x_1,\ y_1)-(x_2,\ y_2)=(x_1-x_2,\ y_1-y_2)}|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$ ……②

・$a^2=|\underbrace{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}_{(x_1,\ y_1)}|^2=x_1{}^2+y_1{}^2$ ……③

・$b^2=|\underbrace{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}_{(x_2,\ y_2)}|=x_2{}^2+y_2{}^2$ ……④

・$ab\cos\theta=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\vec{a}\cdot\vec{b}$ ……⑤ であるので，②，③，④，⑤を①に代入して，

$\underbrace{(x_1-x_2)^2}_{\cancel{x_1{}^2}-2x_1x_2+\cancel{x_2{}^2}}+\underbrace{(y_1-y_2)^2}_{\cancel{y_1{}^2}-2y_1y_2+\cancel{y_2{}^2}}=\cancel{x_1{}^2}+\cancel{y_1{}^2}+\cancel{x_2{}^2}+\cancel{y_2{}^2}-2\vec{a}\cdot\vec{b}$ となる。

これをまとめると，$-2x_1x_2-2y_1y_2=-2\vec{a}\cdot\vec{b}$ この両辺を -2 で割ると，
内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の成分表示の公式：$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$ ……(＊) が導ける。……(終)