補充問題 1　● div(grad u), rot(grad u) ●

$u(x, y, z) = e^{x-y} + e^{2z}$ のとき，div(grad u) と rot(grad u) を求めよ。

ヒント！ $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,u) = \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$，$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,u) = \mathbf{0}$ となることは分かっているが，実際に自分で計算して，確認しよう。いい練習になるからね。

解答＆解説

$u = e^x \cdot e^{-y} + e^{2z}$ より，grad u を求めると，

$$\mathrm{grad}\,u = \left[\frac{\partial}{\partial x}(e^x \cdot \underbrace{e^{-y}}_{\text{定数扱い}} + \underbrace{\cancel{e^{2z}}}_{\text{定数扱い}}),\ \frac{\partial}{\partial y}(\underbrace{e^x}_{\text{定数扱い}} \cdot e^{-y} + \underbrace{\cancel{e^{2z}}}_{\text{定数扱い}}),\ \frac{\partial}{\partial z}(\underbrace{\cancel{e^x \cdot e^{-y}}}_{\text{定数扱い}} + e^{2z})\right]$$

$= [e^x \cdot e^{-y},\ -e^x \cdot e^{-y},\ 2e^{2z}]$ ……① となる。

(i) ①を用いて，div(grad u) を求めると，

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,u) = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cdot \underbrace{e^{-y}}_{\text{定数扱い}}) + \frac{\partial}{\partial y}(\underbrace{-e^x}_{\text{定数扱い}} \cdot e^{-y}) + \frac{\partial}{\partial z}(2e^{2z})$$

$= e^x \cdot e^{-y} + e^x \cdot e^{-y} + 4e^{2z}$

$= 2 \cdot e^{x-y} + 4 \cdot e^{2z}$

$= 2(e^{x-y} + 2e^{2z})$ となる。……(答)

$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,u) = \Delta u$
$= u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$
$= e^x \cdot e^{-y} + e^x \cdot e^{-y} + 4e^{2z}$
$= 2(e^{x-y} + 2e^{2z})$
と一致する。

(ii) ①を用いて，rot(grad u) を求めると，

右のように計算して，

rot(grad u)

$= [0-0,\ 0-0,\ -e^{x-y} + e^{x-y}]$

$= [0,\ 0,\ 0]$

$= \mathbf{0}$ となる。…………………(答)

この結果は，公式 $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,u) = \mathbf{0}$ と一致する。

$\frac{\partial}{\partial x}$　$\frac{\partial}{\partial y}$　$\frac{\partial}{\partial z}$　$\frac{\partial}{\partial x}$

$e^x \cdot e^{-y}$　$-e^x \cdot e^{-y}$　$2e^{2z}$　$e^x \cdot e^{-y}$

$-e^x \cdot e^{-y} + e^x \cdot e^{-y}$] [$0-0$,　$0-0$,