§2. 数値解析入門

これまで，様々な偏微分方程式を解析的に手計算で解を求める手法について詳しく解説してきた。しかし，実はそれ以外にも“**差分方程式**(さぶん)”を作って，コンピュータ・プログラムにより，偏微分方程式を“**数値解析**(すうち)”により近似的に解く手法もあるんだね。

ここでは，この数値解析の入門として，**1** 次元熱伝導方程式の差分方程式を導き，これを利用して **BASIC** プログラムにより，ある初期温度分布がどのように経時変化していくのか，(ⅰ)放熱条件の場合と(ⅱ)断熱条件の場合のそれぞれについて，数値解析の結果のグラフを示そうと思う。

● 熱伝導方程式の差分方程式を求めよう！

それではまず，**1** 次元熱伝導方程式：

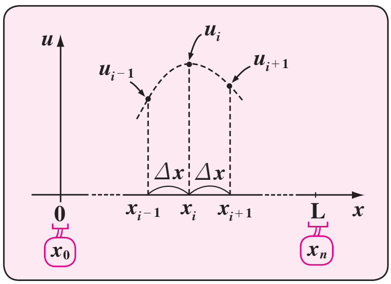
$\dfrac{\partial u}{\partial t} = a \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ……①　(a：温度伝導率)　の差分方程式を導いてみよう。

①の温度 u は，時刻 t と位置変数 x の **2** 変数関数なので，$u = u(x, t)$ と表される。ここで，差分方程式とは①の近似方程式のことなので，①の左・右両辺の近似式を導いてみる。

(ⅰ)(①の左辺) $= \dfrac{\partial u}{\partial t} \fallingdotseq \dfrac{\Delta u}{\Delta t}$　　$\boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta t} = \dfrac{\partial u}{\partial t}}$

$= \dfrac{u(x, t+\Delta t) - u(x, t)}{\Delta t}$ ……②　となる。数値解析では，

この位置 x の範囲 $0 \leqq x \leqq L$ を n 等分に分割して，$x_i = i \cdot \Delta x$ ($i = 0, 1, 2, \cdots, n$，$n \cdot \Delta x = L$) として，各位置 x_i における温度を，右図に示すように u_i ($i = 0, 1, 2, \cdots, n$) で表す。さらに，時刻 t を旧時刻，$t + \Delta t$ を新時刻とおくことにすると，②は次のようにシンプルに表すことができるんだね。



$$(\text{①の左辺}) \fallingdotseq \frac{\overset{\text{新時刻}}{u_i} - \overset{\text{旧時刻}}{u_i}}{\Delta t} \quad \cdots\cdots③$$

(ii) $(\text{①の右辺}) = a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$

$$\fallingdotseq \frac{a}{\Delta x}\cdot\left\{\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x} - \frac{u(x,t)-u(x-\Delta x,t)}{\Delta x}\right\} \cdots④$$ となる。

ここで，時刻はすべて旧時刻 t であり，$x_{i+1}=x+\Delta x$，$x_i=x$，$x_{i-1}=x-\Delta x$ に対応する温度 u を，**P254** 右下の図に示すように，それぞれ u_{i+1}，u_i，u_{i-1} とおくと，④も次のようにシンプルな近似式：

$$(\text{①の右辺}) \fallingdotseq \frac{a}{\Delta x}\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x} - \frac{u_i-u_{i-1}}{\Delta x}\right)$$

u_{i+1}，u_i，u_{i-1} はすべて旧時刻 t における値

$$= \frac{a}{(\Delta x)^2}(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}) \quad \cdots\cdots⑤$$ で表すことができる。

よって，③，⑤を①に代入してまとめると，

$$\frac{u_i - u_i}{\Delta t} = \frac{a}{(\Delta x)^2}(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1})$$ となって，①の差分方程式は，

$$\underbrace{u_i}_{\text{新時刻 } t+\Delta t} = \underbrace{u_i + \frac{a\cdot\Delta t}{(\Delta x)^2}(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1})}_{\text{すべて，旧時刻 } t} \cdots⑥ \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1)$$ となる。

⑥式の右辺は，すべて旧時刻 t の式であり，左辺は新時刻 $t+\Delta t$ の式である。

ここで，時刻 $t=0$ のときの温度分布を初期条件とし，また (i) 放熱条件や (ii) 断熱条件などの境界条件が与えられると，⑥式を利用して温度分布の経時変化を調べることができる。より具体的に示すと，

(i) $t=0$ のとき，初期条件の温度分布 u_{i-1}，u_i，u_{i+1} を旧時刻の温度分布として，⑥の右辺に代入して，$t=0+\Delta t=\Delta t$ 秒後の新時刻の温度分布 u_i $(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を算出する。

(ii) $t=\Delta t$ のときの温度分布 u_{i-1}，u_i，u_{i+1} を旧時刻の温度分布として，⑥の右辺に代入して，$t=\Delta t+\Delta t=2\cdot\Delta t$ 秒後の新時刻の温度分布 u_i $(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を算出する。

(iii) $t=2\cdot\Delta t$ のときの温度分布 u_{i-1}，u_i，u_{i+1} を旧時刻の温度分布として，⑥の右辺に代入して，$t=2\cdot\Delta t+\Delta t=3\cdot\Delta t$ 秒後の新時刻の温度分布 u_i $(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を算出する。

以下同様に，$t = 4 \cdot \Delta t,\ 5 \cdot \Delta t,\ 6 \cdot \Delta t,\ \cdots$における温度分布 u_i の経時変化の様子を⑥式により算出していくことができるんだね。これで，プログラムによる計算のアルゴリズム（手順）をご理解頂けたと思う。

それでは，具体例として（i）放熱条件と（ii）断熱条件の **2** つの境界条件について，**1** 次元熱伝導方程式を解いた結果を示そう。

● 1 次元熱伝導方程式（放熱条件）の数値解を示そう！

それでは，具体例として次の例題の **1** 次元熱伝導方程式の数値解析の結果を示そう。

例題 1　次の **1** 次元熱伝導方程式を，与えられた次の初期条件と境界条件（放熱条件）の下で，数値解析により解け。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \cdots\cdots ① \quad (0 < x < 1,\ t > 0)$$ ←定数 $a = 1$ とした。

境界条件：$u(0,\ t) = u(1,\ t) = 0$ ←放熱条件

初期条件：$u(x,\ 0) = \begin{cases} 10 & \left(0 < x \leqq \frac{1}{2}\right) \\ 0 & \left(\frac{1}{2} < x \leqq 1\right) \end{cases}$

この問題を $\Delta x = 10^{-2}$，$\Delta t = 10^{-5}$ として，数値解析した結果，図 **1** の初期条件（初期温度分布）が，時刻 t の経過と共に放熱条件により，図 **2** に示すように零分布に近づいていく様子が分かるんだね。

図 **1**　初期条件

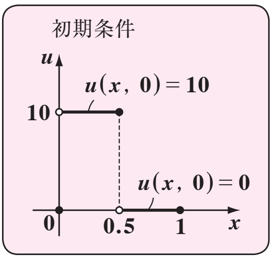
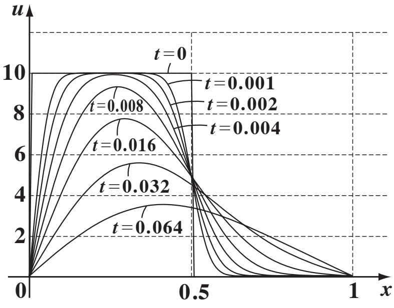


図 **2**　温度分布の経時変化（放熱条件）



● 1次元熱伝導方程式(断熱条件)の数値解を示そう!

次に，断熱条件の境界条件の下，**1** 次元熱伝導方程式の数値解を示そう。

> **例題 2**　次の **1** 次元熱伝導方程式を，与えられた初期条件と境界条件(断熱条件)の下で，数値解析により解け。
>
> $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdots\cdots ①\quad (0 < x < 1,\ t > 0)$$ ← 定数 $a=1$ とした。
>
> 境界条件：$\dfrac{\partial u(0,\ t)}{\partial x} = \dfrac{\partial u(1,\ t)}{\partial x} = 0$ ← 断熱条件
>
> 初期条件：$u(x,\ 0) = \begin{cases} 10 & \left(0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}\right) \\ 0 & \left(\frac{1}{2} < x \leqq 1\right) \end{cases}$

この問題は,境界条件以外は例題 **1** と同じ問題なんだね。同様に $\Delta x = 10^{-2}$, $\Delta t = 10^{-5}$ として,数値解析を行った結果を初期条件と共に,図 **3**,図 **4** に示す。

図 **3**　初期条件

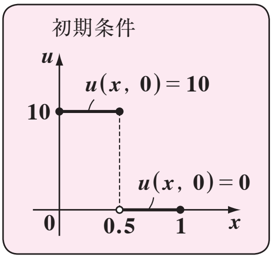
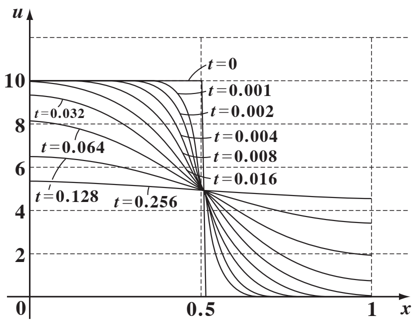


図 **4**　温度分布の経時変化(断熱条件)



今回は，境界 ($x = 0$ と $x = 1$) において断熱条件なので，図 **4** に示すように温度分布は時刻の経過と共に，零分布に近づくのではなく，一様分布に近づいていくんだね。

例題 **1** の放熱条件をプログラムで表すと，$u_0 = 0$，$u_n = 0$ であり，

x = 0 と x = 1 での温度が 0

例題 **2** の断熱条件をプログラムで表すと，$u_0 = u_1$，$u_{n-1} = u_n$ であるんだね。

x = 0 と x = 1 での温度勾配が 0

ただこれだけで，まったく異なる温度分布の経時変化が現れるんだね。この数値解析をさらに楽しみたい方はマセマの **「数値解析キャンパス・ゼミ」** で学習されることを勧める。