● 数列の漸化式と証明問題にもチャレンジしよう！

次の数列の漸化式と不等式の証明の融合問題を解いてみよう。

補充問題 3	制限時間 8 分	難易度 ★★	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

数列 $\{a_n\}$ が，$a_1=0$，$a_{n+1}=\dfrac{3a_n+2}{a_n+2}$ ……① $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義されている。次の各問いに答えよ。

(1) 方程式 $x=\dfrac{3x+2}{x+2}$ ……②の解を $\alpha,\beta\ (\alpha>\beta)$ とおくと，$\alpha=\boxed{\text{ア}}$，$\beta=\boxed{\text{イウ}}$ である。

(2) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n=\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$ ……③ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義するとき，数列 $\{b_n\}$ が等比数列となることを，次のように示そう。

$b_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}$ に①と α,β の値を代入すると，

$b_{n+1}=\dfrac{1}{\boxed{\text{エ}}}\times\dfrac{a_n-\boxed{\text{ア}}}{a_n-\boxed{\text{イウ}}}$ となる。よって，数列 $\{b_n\}$ は

初項 $b_1=\boxed{\text{オカ}}$，公比 $\dfrac{1}{\boxed{\text{エ}}}$ の等比数列である。

(3) (2) の結果を用いて，一般項 a_n を求めると $a_n=\dfrac{2-\boxed{\text{キ}}\,\boxed{\text{ク}}^{-2n}}{1+\boxed{\text{ケ}}\,\boxed{\text{コ}}^{-2n}}$

$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ となる。ここで，a_n と α と β の式との次の各不等式⓪～③の中で最も適したものを選ぶと $\boxed{\text{サ}}$ である。

⓪ $\beta<a_n<\alpha-1$	① $\beta+1\leqq a_n<\alpha$
② $\beta+2<a_n<\alpha+1$	③ $-\alpha+1<a_n\leqq\beta$

ヒント！ (1), (2) では②の特性方程式を解いて求めた解 α,β を用いて，新たな数列 $\{b_n\}$ を③のように定義すると，これは等比数列になる。よって，一般項 b_n を求めよう。(3) では b_n の式から a_n の一般項を求め，この存在範囲を調べればいいんだね。頑張ろう！

解答＆解説

ココがポイント

(1) $a_1=0$，$a_{n+1}=\dfrac{3a_n+2}{a_n+2}$ ……① $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

について，この特性方程式：$x=\dfrac{3x+2}{x+2}$ を解くと，

⇦ ①の a_n と a_{n+1} に x を代入したものが特性方程式だ。

$(x-2)(x+1)=0$ より，$x=2,\ -1$

$\therefore\ \alpha=2,\ \beta=-1$ ……………………(答)(ア，イウ)

⇦ $x(x+2)=3x+2$
$x^2-x-2=0,\ (x-2)(x+1)=0$
$\therefore\ x=\underbrace{2}_{\alpha},\ \underbrace{-1}_{\beta}$

(2) $b_n=\dfrac{a_n-2}{a_n+1}$ ……③ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくと，

$$b_{n+1}=\frac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}+1}=\frac{\dfrac{3a_n+2}{a_n+2}-2}{\dfrac{3a_n+2}{a_n+2}+1}$$

分子·分母に a_n+2 をかける。

⇦ n の代わりに $n+1$ とおいて，a_{n+1} に①を代入して変形する。

$$=\frac{3a_n+2-2(a_n+2)}{3a_n+2+a_n+2}=\frac{a_n-2}{4(a_n+1)}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\underbrace{\frac{a_n-2}{a_n+1}}_{b_n}$$ ……………………(答)(エ)

よって，$b_{n+1}=\dfrac{1}{4}b_n$ であり，$b_1=-2$ より，

⇦ $b_1=\dfrac{a_1-2}{a_1+1}=\dfrac{0-2}{0+1}=-2$

数列 $\{b_n\}$ は，初項 $b_1=-2$，公比 $\dfrac{1}{4}$ の等比数列

である。……………………………(答)(オカ)

(3) よって，$b_n=(-2)\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

$=-2^{3-2n}$ ……④ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

⇦ $b_n=(-2)\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$
$=-2\cdot 2^{-2(n-1)}$
$=-2^{1-2n+2}=-2^{3-2n}$

よって，$b_n=\dfrac{a_n-2}{a_n+1}$ ……③ より，

$$a_n=\frac{2+b_n}{1-b_n}=\frac{2-2^{3-2n}}{1+2^{3-2n}}$$ …⑤ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

……(答)(キ，ク，ケ，コ)

⇦ $b_n\cdot(a_n+1)=a_n-2$
$(1-b_n)a_n=b_n+2$
$a_n=\dfrac{2+b_n}{1-b_n}$

ここで，$2^{3-2n}>0$ より，

$$a_n=\frac{2-2^{3-2n}}{1+2^{3-2n}}<\frac{2-0}{1+0}=2=\alpha$$ である。

また，$n\to\infty$ のとき $2^{3-2n}\to+0$ より，

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ と n を大きくすると，a_n は単調に増加する。そして $a_1=0$ より，

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ のとき，a_n は，

$\underbrace{0}_{\beta+1}\leqq a_n<\underbrace{2}_{\alpha}$ をみたす。 $\therefore$ ① ……………(答)(サ)

⇦ $n\to$大のとき，

$a_n=\dfrac{2-2^{3-2n}}{1+2^{3-2n}}$ より，

a_n は単調に増加する。