● 2 次方程式の論証問題も解いてみよう！

2 次方程式の整数解についての論証問題も解いてみよう。

補充問題 4	制限時間 7 分	難易度 ★★	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

(1) 次の各 **2** 次方程式を解いて，解を小さい順に示すと，

(ⅰ) $x^2+12x+32=0$ の解は，　$x=$ $\boxed{アイ}$，$\boxed{ウエ}$ であり，

(ⅱ) $x^2-4x-21=0$ の解は，　$x=$ $\boxed{オカ}$，$\boxed{キ}$ であり，

(ⅲ) $x^2+7x-18=0$ の解は，　$x=$ $\boxed{クケ}$，$\boxed{コ}$ である。

(2) **(1)** の結果から，$x^2+ax+b=0$ ……㊉ (a，b：整数) の形の **2** 次方程式が整数解をもつ場合，a または b は偶数であることが推定できる。

これから，次の命題：

「a, b が共に奇数ならば，㊉の **2** 次方程式は整数解をもたない。」…(＊＊)

が成り立つことを背理法により，次のように証明してみよう。

次の $\boxed{サ}$ ～ $\boxed{ソ}$ に当てはまるものを下の⓪～⑦の内から **1** つ選べ。ただし，同じものを選んでもかまわない。

㊉を変形して，$x(x+a)+b=0$……㊉´ とおく。

a と b が共に奇数のとき㊉´，すなわち㊉の **2** 次方程式が整数解をもつものと仮定すると，x は整数とおける。よって，

(ⅰ) x が奇数のとき $x(x+a)$ は $\boxed{サ}$ であり，$x(x+a)+b$ は $\boxed{シ}$ である。

(ⅱ) x が偶数のとき $x(x+a)$ は $\boxed{ス}$ であり，$x(x+a)+b$ は $\boxed{セ}$ である。

以上 (ⅰ)(ⅱ) より，$x(x+a)+b$ $\boxed{ソ}$ となって，㊉´，すなわち㊉と矛盾する。ゆえに，背理法により命題 (＊＊) は成り立つ。

⓪ 偶数	① 奇数	② **2** 以上の数	③ -2 より小さい数
④ $\neq 0$	⑤ >0	⑥ $\geqq 2$	⑦ <-2

ヒント！ **(1)** は，$x^2+ax+b=0$ の形の **2** 次方程式より，たして a，かけて b となる **2** つの整数を見つけて解いていけばよい。**(2)** は論証問題だね。㊉の左辺の式の値が奇数か偶数かを考えながら，穴を埋めていけばいいんだね。

解答＆解説

(1) (i) $x^2+12x+32=0$ より，$(x+4)(x+8)=0$

∴ $x=-8,\ -4$ ……………(答)(アイ)，(ウエ)

⇦ $x^2+\underbrace{(4+8)}_{\text{たして}}x+\underbrace{4\times8}_{\text{かけて}}=0$

(ii) $x^2-4x-21=0$ より，$(x+3)(x-7)=0$

∴ $x=-3,\ 7$ …………………(答)(オカ)，(キ)

⇦ $x^2+\underbrace{(-7+3)}_{\text{たして}}x+\underbrace{(-7)\times3}_{\text{かけて}}=0$

(iii) $x^2+7x-18=0$ より，$(x-2)(x+9)=0$

∴ $x=-9,\ 2$ ………………………(答)(クケ，コ)

⇦ $x^2+\underbrace{(-2+9)}_{\text{たして}}x+\underbrace{(-2)\times9}_{\text{かけて}}=0$

(2) $x^2+ax+b=0$ …㊟ (a, b: 整数) について命題：「a, b が共に奇数ならば，㊟は整数解をもたない。」……(＊＊)を背理法により証明する。

⇦「$x^2+ax+b=0$……㊟ (a，b：整数) が整数解をもつとき，a または b は偶数である。」の対偶だね。

a, b が共に奇数のとき，㊟は整数解をもつ，すなわち $x=$(整数) と仮定する。ここで㊟を変形して

$x(x+a)+b=0$ ……㊟´ とおく。

⇦ $x=$(整数) のとき，(i) $x=$(奇数)，または (ii) $x=$(偶数) だね。

(i) x が奇数のとき，

・$\underbrace{x}_{\text{奇}}\cdot(\underbrace{x}_{\text{奇}}+\underbrace{a}_{\text{奇}})=(\text{奇数})\times(\text{偶数})=(\text{偶数})$

・$\underbrace{x(x+a)}_{\text{偶}}+\underbrace{b}_{\text{奇}}=(\text{偶数})+(\text{奇数})=(\text{奇数})$

∴ $x(x+a)$ は偶数で $x(x+a)+b$ は奇数より，

⓪……………(答)(サ)，① ……………(答)(シ)

⇦ $\underbrace{x}_{\text{奇}}\cdot\underbrace{(\underbrace{x}_{\text{奇}}+\underbrace{a}_{\text{奇}})}_{\text{偶}}=(\text{奇数})\times(\text{偶数})=(\text{偶数})$ より，

$\underbrace{x(x+a)}_{\text{偶}}+\underbrace{b}_{\text{奇}}=(\text{奇数})$

(ii) x が偶数のとき，

・$\underbrace{x}_{\text{偶}}\cdot(\underbrace{x}_{\text{偶}}+\underbrace{a}_{\text{奇}})=(\text{偶数})\times(\text{奇数})=(\text{偶数})$

・$\underbrace{x(x+a)}_{\text{偶}}+\underbrace{b}_{\text{奇}}=(\text{偶数})+(\text{奇数})=(\text{奇数})$

∴ $x(x+a)$ は偶数で $x(x+a)+b$ は奇数より，

⓪……………(答)(ス)，① ……………(答)(セ)

⇦ $\underbrace{x}_{\text{偶}}\cdot\underbrace{(\underbrace{x}_{\text{偶}}+\underbrace{a}_{\text{奇}})}_{\text{奇}}=(\text{偶数})\times(\text{奇数})=(\text{偶数})$ より，

$\underbrace{x(x+a)}_{\text{偶}}+\underbrace{b}_{\text{奇}}=(\text{奇数})$

以上 (i)(ii) より，x が奇数，偶数のいずれにおいても，㊟´，すなわち㊟の左辺は奇数となるので 0(偶数) にはなり得ない。すなわち，

$x^2+ax+b\neq0$　∴ ④ ……………………(答)(ソ)

よって，㊟と矛盾するので，命題 (＊＊) は成り立つ。