練習問題 79　面積公式（Ⅴ）　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

2つの放物線 $C_1: y=f(x)=x^2$ と，$C_2: y=g(x)=x^2-6x+15$ がある。

(1) 放物線 C_1 上の点 $(1,\ 1)$ における接線 l の方程式を求めよ。
また，l は放物線 C_2 の接線であることも確認せよ。

(2) 2つの放物線 C_1 と C_2，およびこれらの共通接線 l とで囲まれる図形の面積 S を求めよ。

(1) $C_1: y=f(x)$ 上の点 $(1,\ f(1))$ における接線 l の方程式は，公式：$y=f'(1)\cdot(x-1)+f(1)$ から求められる。次に，l と C_2 の方程式から y を消去して，x の2次方程式を作り，それが重解をもつことを確認すればいいんだね。(2)では2つの放物線と共通接線とで囲まれる図形の面積公式：$S=\dfrac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3$ を利用して計算しよう。

$$\begin{cases}\text{放物線 } C_1: y=f(x)=x^2 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}\\ \text{放物線 } C_2: y=g(x)=x^2-6x+15 & \cdots\cdots\text{②}\end{cases}$$ とおく。

$y=g(x)=(x^2-6x+9)+15-9$
$=(x-3)^2+6$ より，$y=g(x)$ は，頂点 $(3,\ 6)$ の下に凸の放物線

(1) ①を x で微分して，$f'(x)=2x$

よって，$y=f(x)$ 上の点 $(1,\ \underbrace{1}_{f(1)})$ における C_1 の接線 l の方程式は，

$y=2\cdot(x-1)+1$ ← $y=f'(1)\cdot(x-1)+f(1)$

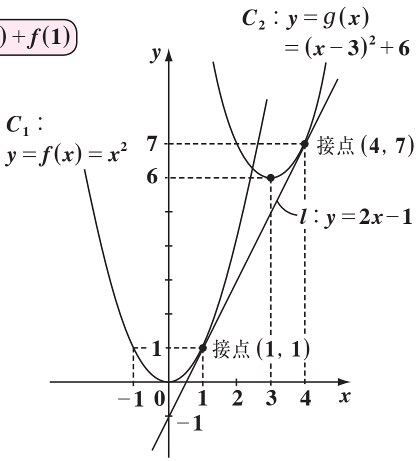
∴接線 $l: y=2x-1$ ……③ となる。

次に②と③から y を消去して，

$x^2-6x+15=2x-1$

$x^2-8x+16=0\qquad (x-4)^2=0$

∴ $x=4$（重解）となるので，右図に示すように，放物線 C_2 と直線 l は，$x=4$ のとき，すなわち点 $(4,\ \underbrace{7}_{2\cdot4-1})$ において接することが確認できた。



つまり，直線 l は2つの放物線 C_1 と C_2 の共通接線であることが分かったんだね。

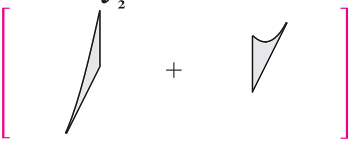
(2) $C_1 : y = f(x) = \underbrace{1}_{a} \cdot x^2$ と，

$C_2 : y = g(x) = \underbrace{1}_{a} \cdot x^2 - 6x + 15$ と，

$l : y = 2x - 1$ とで囲まれる

図形の面積 S を求めると，

$$S = \int_1^{\frac{5}{2}} \{f(x) - (2x - 1)\} dx + \int_{\frac{5}{2}}^{4} \{g(x) - (2x - 1)\} dx$$

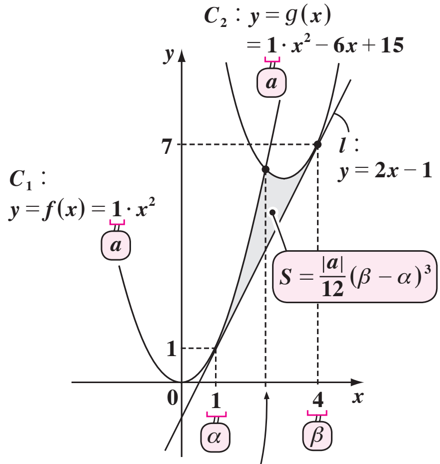


$$= \frac{1}{12}(4 - 1)^3 = \frac{3^3}{12} = \frac{3^2}{4}$$

$$= \frac{9}{4}$$ となって，答えが導ける。

面積公式
$S = \frac{|a|}{12}(\beta - \alpha)^3$
$(a = 1,\ \alpha = 1,\ \beta = 4)$

もちろん，積分計算：
$S = \int_1^{\frac{5}{2}} (x^2 - 2x + 1) dx + \int_{\frac{5}{2}}^{4} (x^2 - 8x + 16) dx$
を行っても同じ結果が得られる。
チャレンジしたい人はやってみよう！



$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{5}{2}$

$\begin{cases} y = f(x) = x^2 \\ y = g(x) = x^2 - 6x + 15 \end{cases}$ より
y を消去して，
$\cancel{x^2} = \cancel{x^2} - 6x + 15,\ 6x = 15$
$\therefore\ x = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$ として，C_1 と C_2
の交点の x 座標を求めてもいい。

以上で，**「初めから始める数学 II　改訂 8」**の講義もすべて終了です！みんな最後までよく頑張ったね！ やりとげた後の爽快感はまた格別だね。でも，1 回ですべてマスターしたつもりになってはいけないよ。この後，シッカリ復習することだ。そして，次回の講義では，さらに成長したキミ達に会うことを楽しみにしている。それまで，みんな元気でな。さようなら…。

マセマ代表　馬場敬之（けいし）