補充問題　5　　難易度 ★★★　　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

(1) $x \geqq 0$ において，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leqq \log(1+x) \leqq x \quad \cdots\cdots ①$$

(2) 次の極限を求めよ。 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$

(3) 自然数 n に対して

$$P_n = \left(1+\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$$

とおく。極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}P_n$ を求めよ。　　　　(信州大)

ヒント！ (1) $f(x) = x - \log(1+x)$，$g(x) = \log(1+x) - \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)$ とおいて，これらが $x \geqq 0$ のとき $f(x) \geqq 0$，$g(x) \geqq 0$ となることを示せばいい。(2) は，区分求積法：$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$ を利用すればいい。(3) は，$\log P_n = Q_n$ とおいて，まず $\displaystyle\lim_{n\to\infty}Q_n$ を求めよう。

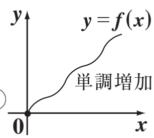
(1) $\underbrace{x - \frac{1}{2}x^2 \leqq \underbrace{\log(1+x) \leqq x}_{(\text{i})}}_{(\text{ii})}$ $\cdots ①$ $(x \geqq 0)$

が成り立つことを示す。

(i) $f(x) = x - \log(1+x)$　$(x \geqq 0)$ とおくと，$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x} \geqq 0$

よって，$y = f(x)$ は $x \geqq 0$ で単調に増加し，かつ $f(0) = 0 - \log 1 = 0$

より，$x \geqq 0$ のとき，$f(x) \geqq 0$ である。



$\therefore$ $\underline{\log(1+x) \leqq x}$ $\cdots ②$

が成り立つ。

(ii) $g(x) = \log(1+x) - \left(x - \dfrac{1}{2}x^2\right)$

$(x \geqq 0)$ とおくと，

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - (1-x)$$
$$= \frac{1-(1-x)(1+x)}{1+x}$$
$$= \frac{x^2}{1+x} \geqq 0 \quad \text{より，}$$

$y = g(x)$ は $x \geqq 0$ で単調に増加し，かつ $g(0) = \log 1 - (0-0) = 0$ である。よって，(i) と同様に，$x \geqq 0$ のとき $g(x) \geqq 0$ である。

$\therefore$ $\underline{x - \dfrac{1}{2}x^2 \leqq \log(1+x)}$ $\cdots ③$ が成り立つ。

以上 (i)(ii) の②，③より，$x \geqq 0$ のとき①は成り立つ。……………………(終)

(2)

> 区分求積法：
> $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}} \quad \text{となる。}$$

よって，区分求積法により，

$$与式=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

$f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$ より，$f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

ここで，$x=2\sin\theta$ とおくと，$x:0\to1$ のとき，$\theta:0\to\frac{\pi}{6}$

$\sqrt{a^2-x^2}$ などの積分では，$x=a\sin\theta$ とおく。

$dx=2\cos\theta d\theta$ より，

$$与式=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos\theta}{\sqrt{4-4\cdot\sin^2\theta}}\,d\theta$$

$2\sqrt{1-\sin^2\theta}=2\sqrt{\cos^2\theta}=2|\cos\theta|=2\cos\theta$
$\left(\because 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}\text{ のとき，}\cos\theta>0\right)$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cancel{2\cos\theta}}{\cancel{2\cos\theta}}\,d\theta=\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}\cdots④$$

である。……………………………(答)

(3) $P_n=\left(1+\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$

$(n=1,2,3,\cdots)$ について，この両辺は正より，この両辺の自然対数をとって，$Q_n=\log P_n$ とおくと，

$Q_n=\log P_n$　　公式：$\log xy=\log x+\log y$

$$=\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}\right)+\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}\right)+\cdots\cdots+\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\log\Bigl(1+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}}_{x(\geqq0)}\Bigr)\cdots⑤\text{となる。}$$

ここで，$k=1,2,3,\cdots,n$ より，

$\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}\geqq0$　ここで，$\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}=x$

とおくと，①より，

$$\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}-\frac{1}{2(4n^2-k^2)}\leqq\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}\right)\leqq\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}\cdots\cdots⑥\text{ が成り立つ。}$$

よって，⑥の各辺のΣ計算を行うと，

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}-\frac{1}{2(4n^2-k^2)}\right)\leqq\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}\right)\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}\cdots⑦$$

が成り立つ。ここで，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2(4n^2-k^2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

より，この両辺の $n\to\infty$ の極限をとると，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2(4n^2-k^2)}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{1}{n}}_{0}\cdot\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}_{\int_0^1\frac{1}{4-x^2}dx\,(\text{区分求積法})}$$

$$=\frac{1}{2}\times0\times\underbrace{\int_0^1\frac{1}{4-x^2}\,dx}_{\text{有限確定値}}=0\text{ となる。}$$

また，(2) の結果より，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}=\frac{\pi}{6}\quad\cdots④\text{より，}$$

⑦の各辺の $n\to\infty$ の極限をとると，

$$\frac{\pi}{6}-0\leqq\underbrace{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}\right)}_{Q_n(=\log P_n)}\leqq\frac{\pi}{6}$$

となって，はさみ打ちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}Q_n=\lim_{n\to\infty}\log P_n=\frac{\pi}{6}\text{ となる。}$$

これから $\lim_{n\to\infty}\log P_n=\log e^{\frac{\pi}{6}}$ より，

求める極限 $\lim_{n\to\infty}P_n$ は，

$\lim_{n\to\infty}P_n=e^{\frac{\pi}{6}}$ である。……………(答)