補充問題 3	難易度 ★★	定積分の計算

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan x}dx$ (2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x}dx$ (3) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}dx$

ヒント！ (1) は，$\displaystyle\int \frac{f'}{f}dx = \log|f| + C$ の形の積分で，(2) は $\cos x = t$ と置換し，(3) は $\sin x = t$ と置換すればうまくいくんだね。今回は，類似した積分計算をまとめてやっておこう！

解答＆解説

(1) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan x}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x}dx$ ← これは，$\displaystyle\int\frac{f'}{f}dx$ の形

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)'}{\sin x}dx = \Big[\log(\underbrace{\sin x}_{\oplus})\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \log\Big(\underbrace{\sin\frac{\pi}{3}}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Big) - \log\Big(\underbrace{\sin\frac{\pi}{6}}_{\frac{1}{2}}\Big) = \log\frac{\sqrt{3}}{2}\ \underbrace{-\log\frac{1}{2}}_{-\log 2^{-1} = +\log 2}$$

$$= \log\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2\right) = \log\sqrt{3} \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sin^2 x}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx$

ここで，$\cos x = t$ とおくと，

$x : \frac{\pi}{6} \to \frac{\pi}{3}$ のとき，$t : \frac{\sqrt{3}}{2} \to \frac{1}{2}$ であり，

$-\sin x dx = dt$ より，$\sin x dx = -dt$ となる。

よって，

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x}dx = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{-1}{1-t^2}dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{(1+t)(1-t)}dt$$

t で，積分区間を入れ替えた！

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)dt \cdots\cdots①\ \text{となる。}$$

よって，

ココがポイント

⇦ $\displaystyle\frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\cos x}{\sin x}$

⇦ $\displaystyle\int\frac{f'}{f}dx = \log|f| + C$

$\frac{\pi}{6} \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}$ で，$f = \sin x > 0$ なので，絶対値は不要！

⇦ $\displaystyle\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x}{\sin^2 x} = \frac{1}{1-\cos^2 x}\cdot\sin x = f(\cos x)\cdot\sin x$ の形なので $\cos x = t$ と置換する。

⇦ $(\cos x)'dx = t'\cdot dt$ より，$-\sin x dx = 1\cdot dt$

⇦ $\displaystyle\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} = \frac{1\cancel{-t}+1\cancel{+t}}{(1+t)(1-t)} = \frac{2}{(1+t)(1-t)}$ より，

$\displaystyle\frac{1}{(1+t)(1-t)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x}dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{1}{1+t} - \frac{-1}{1-t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\log(\underbrace{1+t}_{\oplus}) - \log(\underbrace{1-t}_{\oplus})\Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log\frac{1+t}{1-t}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} - \log\frac{3}{1}\right)$$

$$\boxed{\frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{4+4\sqrt{3}+3}{4-3} = 7+4\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{2}\{\log(7+4\sqrt{3}) - \log 3\}$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{7+4\sqrt{3}}{3}$$ である。……………………(答)

・$\dfrac{1}{1+t} = \dfrac{(1+t)'}{1+t}$ だし，

・$\dfrac{-1}{1-t} = \dfrac{(1-t)'}{1-t}$ の形なんだね。

・$\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ で，$1+t>0$，$1-t>0$ より，絶対値は不要だね。

⇦ ・$\log\dfrac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \log\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

・$\log\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \log\dfrac{3}{1}$ となる。

(3) $$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$$

ここで，$\sin x = t$ とおくと，

$x : \dfrac{\pi}{6} \to \dfrac{\pi}{3}$ のとき，$t : \dfrac{1}{2} \to \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であり，

$\cos x dx = dt$ となる。よって，

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{1-t^2}dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{(1+t)(1-t)}dt$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)dt$$

となって，(2) のときの定積分①と同じ式になった。よって，

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}dx = \frac{1}{2}\log\frac{7+4\sqrt{3}}{3}$$ である。……(答)

⇦ $\underbrace{\dfrac{1}{1-\sin^2 x}}\cos x = \underbrace{f(\sin x)}\cdot\cos x$ の形だから $\sin x = t$ とおくとうまくいくんだね。

⇦ $(\sin x)'dx = t'dt$ より，$\cos x dx = dt$ となる。

このように，類似した定積分をまとめて計算することにより，積分計算の見通しも立てやすくなるんだね。面白かったでしょう？