確率の最大値

絶対暗記問題 50　難易度 ★★★　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

n を 9 個以上の自然数とする。袋の中に n 個の球が入っている。このうち 6 個は赤球で残りは白球である。この袋から 6 個の球を同時に取り出すとき，3 個が赤球である確率を P_n とする。

(1) P_{10} を求めよ。　　(2) $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}$ を求めよ。

(3) P_n が最大となる n を求めよ。　　　　(大分大)

ヒント！ $n=9, 10, 11, \cdots$のとき，確率 P_n を最大とする n を求める問題なんだね。そのためには，(2) の $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}$ について，(i) $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}>1$，(ii) $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}=1$，(iii) $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}<1$ となる n の値，または範囲を求めればいいんだね。ン？何故，たとえば (i) は，$P_{n+1}>P_n$ としないのかって？それは $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}$ の形で計算した方が，分子・分母で打ち消せる要素が沢山あるからなんだね。

解答＆解説

(1) $n=10$ のとき，赤球 6 個，白球 4 個の計 10 個から 6 個の球を取り出し，その 6 個中 3 個が赤球である確率を P_{10} とおく。P_{10} を求めると，

6 個 (赤 3 個)

赤 6 個
白 4 個

$$P_{10}=\frac{{}_6C_3\times{}_4C_3}{{}_{10}C_6}\quad\longleftarrow\ \frac{(\text{赤 6 個から 3 個})\times(\text{白 4 個から 3 個})}{(\text{10 個から 6 個})}$$

$$=\frac{\dfrac{6!}{\boxed{3!\cdot3!}}\cdot4}{\dfrac{10!}{\boxed{6!\cdot4!}}}=\frac{6!\cdot6!\cdot4!\cdot4}{3!\cdot3!\cdot10!}\quad\longleftarrow\ \text{公式：}{}_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}\ \ (\text{また，}{}_4C_3={}_4C_1=4)$$

$$=\frac{\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot4\times6\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}\times\cancel{4}}{\cancel{10}\cdot9\cdot\cancel{8}\cdot7\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{5}}=\frac{4\times6}{9\times7}=\frac{8}{21}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $n=9,\ 10,\ 11,\ 12,\ \cdots$のとき，

$$P_n=\underbrace{\frac{{}_6C_3\times{}_{n-6}C_3}{{}_nC_6}}_{\frac{(\text{赤 6 から 3})\times(\text{白 } n-6 \text{ から 3})}{(n \text{ から 6})}}\ \cdots\cdots①,\quad P_{n+1}=\underbrace{\frac{{}_6C_3\times{}_{n-5}C_3}{{}_{n+1}C_6}}_{\frac{(\text{赤 6 から 3})\times(\text{白 } n-5 \text{ から 3})}{(n+1 \text{ から 6})}}\ \cdots\cdots② \text{より，}$$

$n+1$ のとき，白球は，
$n+1-\underbrace{6}_{\text{赤}}=n-5$ 個
となる。

②÷①を求めると，

$$P_n = \frac{{}_6C_3 \times {}_{n-6}C_3}{{}_nC_6} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$
$$P_{n+1} = \frac{{}_6C_3 \times {}_{n-5}C_3}{{}_{n+1}C_6} \quad \cdots\cdots ②$$

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{\dfrac{\cancel{{}_6C_3} \times {}_{n-5}C_3}{\boxed{{}_{n+1}C_6}}}{\dfrac{\cancel{{}_6C_3} \times {}_{n-6}C_3}{\boxed{{}_nC_6}}} = \frac{{}_{n-5}C_3}{{}_{n-6}C_3} \times \frac{{}_nC_6}{{}_{n+1}C_6}$$

$$= \frac{\dfrac{(n-5)!}{\cancel{3!}\boxed{(n-8)!}}}{\dfrac{(n-6)!}{\cancel{3!}\boxed{(n-9)!}}} \times \frac{\dfrac{n!}{\cancel{6!}\boxed{(n-6)!}}}{\dfrac{(n+1)!}{\cancel{6!}\boxed{(n-5)!}}} = \underbrace{\frac{(n-5)!}{(n-6)!}}_{\boxed{(n-5)}} \times \underbrace{\frac{(n-9)!}{(n-8)!}}_{\boxed{\frac{1}{n-8}}} \times \underbrace{\frac{n!}{(n+1)!}}_{\boxed{\frac{1}{n+1}}} \times \underbrace{\frac{(n-5)!}{(n-6)!}}_{\boxed{(n-5)}}$$

たとえば，$\dfrac{5!}{4!} = \dfrac{5\cdot\cancel{4\cdot3\cdot2\cdot1}}{\cancel{4\cdot3\cdot2\cdot1}} = 5$，$\dfrac{4!}{5!} = \dfrac{\cancel{4\cdot3\cdot2\cdot1}}{5\cdot\cancel{4\cdot3\cdot2\cdot1}} = \dfrac{1}{5}$ と同様の計算だね。

$$\therefore \frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{(n-5)^2}{(n+1)(n-8)} \quad \cdots\cdots ③$$ $(n = 9, 10, 11, \cdots)$ となる。………(答)

(3) ③を用いて，確率 P_n が最大となるときの n の値を求める。

(i) $\dfrac{P_{n+1}}{P_n} > 1 \quad (n = 9, 10, 11, \cdots)$，すなわち $P_n < P_{n+1}$ のとき③より，

$\dfrac{(n-5)^2}{(n+1)(n-8)} > 1$ この両辺に $(n+1)(n-8)(>0)$ をかけて，

$n \geqq 9$ より，$(n+1)(n-8) > 0$

$(n-5)^2 > (n+1)(x-8)$ $\cancel{n^2} - 10n + 25 > \cancel{n^2} - 7n - 8$

$3n < 33$ より，$n < 11$ $\therefore n = 9, 10$

このとき $P_n < P_{n+1}$ より，$P_9 < P_{10} < P_{11}$

$n = 9$ のとき　$n = 10$ のとき

(i) $\dfrac{P_{n+1}}{P_n} > 1$ より，$n < 11$
これから，特に計算しなくても
(ii) $\dfrac{P_{n+1}}{P_n} = 1$ より，$n = 11$
(iii) $\dfrac{P_{n+1}}{P_n} < 1$ より，$n > 11$
となることがスグ分かる！

(ii) $\dfrac{P_{n+1}}{P_n} = 1$，すなわち $P_n = P_{n+1}$ のとき，③より，

$n = 11$ $\therefore P_{11} = P_{12}$

(iii) $\dfrac{P_{n+1}}{P_n} < 1$，すなわち $P_n > P_{n+1}$ のとき，③より，$n > 11$

すなわち $n = 12, 13, 14, \cdots$ のとき，$P_{12} > P_{13} > P_{14} > P_{15} > \cdots$

$n = 12$　$n = 13$　$n = 14$ のとき

以上 (i)(ii)(iii) より $P_9 < P_{10} < P_{11} = P_{12} > P_{13} > P_{14} > P_{15} > \cdots$ となるので，
P_n を最大にする n の値は $n = 11$，または 12 である。 ………………(答)