よって，$a_{k+1}=k+2=(k+1)+1$ となって，
$n=k+1$ のときも $(*)$ は成り立つ。

$a_n=n+1\cdots(*)$ の n に $k+1$ が代入されたもの

以上 (i)(ii) から，数学的帰納法により，任意の自然数 n に対して $(*)$ は成り立つ。これより，一般項 $a_n=n+1$ ……$(*)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であることが示された。

(2) $(*)$ の一般項の式より，求める極限は，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overset{n+1}{\boxed{a_n}}}{3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\overset{0}{\boxed{\frac{1}{n}}}}{3}=\frac{1}{3}$$ である。

分子・分母を n で割った!

それではもう 1 題，数学的帰納法と漸化式の応用問題を解いておこう。

練習問題 63　数学的帰納法の応用(II)　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

数列 $\{a_n\}$ が，$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2n}+2n+\dfrac{1}{2n}$ ……① $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義されているとき，次の各問いに答えよ。

(1) a_2，a_3，a_4 の値を求め，一般項 a_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を推定し，これが正しいことを，数学的帰納法を用いて示せ。

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{n^2}$ を求めよ。

①の漸化式を解いて，一般項 a_n を求めることは難しい。よって，(1) で①に $n=1,\ 2,\ 3$ を代入して，具体的に a_2，a_3，a_4 の値を求めてみるんだね。すると，一般項 a_n の推定式が得られるので，これが，すべての自然数，すなわち，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ についても成り立つことを数学的帰納法を用いて示せばいいんだね。(2) は，一般項 a_n が分かれば，簡単な極限の問題だから，楽に解けるはずだ。頑張ろう!!

(1) $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2n}+2n+\dfrac{1}{2n}$ ……① $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ について，

(i) $n=1$ のとき，①より，a_2 は，

$$a_2=\frac{a_1}{2\times1}+2\times1+\frac{1}{2\times1}=\frac{1}{2}+2+\frac{1}{2}=2+1=3 \text{ となる。}$$

(ii) $n=2$ のとき，①より，a_3 は，

$$a_3=\frac{a_2}{2\times2}+2\times2+\frac{1}{2\times2}=\frac{3}{4}+4+\frac{1}{4}=4+1=5 \text{ となる。}$$

(iii) $n=3$ のとき，①より，a_4 は，

$$a_4=\frac{a_3}{2\times3}+2\times3+\frac{1}{2\times3}=\frac{5}{6}+6+\frac{1}{6}=6+1=7 \text{ となる。}$$

以上より，$a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=5$，$a_4=7$ となるので，一般項 a_n は，

$a_n=2n-1$ ……(＊)　($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$) と推定できる。

この式は，a_1, a_2, a_3, a_4 の値から推定したものに過ぎないので，これが，すべての自然数 $n=1, 2, 3, \cdots$ について成り立つとは限らない。よって，これが一般項であることを示すには，次の数学的帰納法を使う必要があるんだね。

(i) $n=1$ のとき，(＊) は成り立つ。
(ii) $n=k$ ($k=1, 2, 3, \cdots$) のとき (＊) が成り立つと仮定して，
　$n=k+1$ のときについて調べる。…，$n=k+1$ のときも (＊) は成り立つ。
以上 (i)(ii) より，任意の自然数 n について (＊) は成り立つ。

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ について (＊) が成り立つことを，数学的帰納法により示す。

(i) $n=1$ のとき，(＊) は $a_1=2\times1-1=1$ となって，成り立つ。

(ii) $n=k$ ($k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$) のとき

$a_k=2k-1$……(＊)′ が成り立つと仮定して，$n=k+1$ のときについて調べると，①と (＊)′ より，

2k−1 ((＊)′より)　①の n に，k を代入したもの

$$a_{k+1}=\frac{a_k}{2k}+2k+\frac{1}{2k}=\frac{2k-1}{2k}+2k+\frac{1}{2k}=1-\cancel{\frac{1}{2k}}+2k+\cancel{\frac{1}{2k}}$$

$$=2k+1=2(k+1)-1$$

よって，$a_{k+1}=2(k+1)-1$ となって，　←　$a_n=2n-1\cdots\cdots(*)$ の n に $k+1$ を代入したもの

$n=k+1$ のときも $(*)$ は成り立つ。

以上 (i)(ii) から，数学的帰納法により，任意の自然数 n に対して $(*)$ は成り立つ。これから，一般項 $a_n=2n-1\cdots\cdots(*)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であることが示された。

(2) $(*)$ の一般項より，求める極限は，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\boxed{a_n^2}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-4n+1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\Big(4-\underbrace{\boxed{\frac{4}{n}}}_{0}+\underbrace{\boxed{\frac{1}{n^2}}}_{0}\Big)=4$$ である。大丈夫？

$(2n-1)^2$

どう？　これで，$a_{n+1}=pa_n+q$ $(p\neq1,\ q\neq0)$ の形の漸化式から一般項 a_n を求め，その極限を求める問題にも，また，対称形の連立漸化式

$\begin{cases} a_{n+1}=pa_n+qb_n \\ b_{n+1}=qa_n+pb_n \end{cases}$ から一般項 a_n と b_n を求め，極限を求める問題にも，さらに，漸化式と数学的帰納法の融合問題にも自信がついただろう？

ここで使われた $F(n+1)=r\cdot F(n)$ から $F(n)=F(1)\cdot r^{n-1}$ へと変形する考え方は，実はもっとさまざまな漸化式を解く上でポイントとなる変形パターンなんだ。だから，これまでの内容をマスターできた人は，**「元気が出る数学 III」**や**「合格！ 数学 III」**(マセマ)で勉強して，さらに腕に磨きをかけていくといいよ。どんな漸化式でも解いて，その極限が求められるようになると，スバラシイからね。

以上で，**「初めから始める数学 III Part1 改訂 9」**の講義はすべて終了です。みんな，本当によく頑張ったね。でも，本格的な数学 III のテーマである“**微分**(びぶん)・**積分**(せきぶん)”は，Part2 の講義で扱うから，まだまだ気を抜かずに最後まで，やり抜いてほしい。もちろん，マセマは，そんな頑張るキミ達の強い味方だからね。だから，次回は，Part2 で会おうな！

それまで，みんな元気で…。またキミ達に会えることを楽しみにしてる。

さようなら。

マセマ代表　馬場 敬之(けいし)