補充問題 8	難易度 ★★★	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

a を実数とする。関数 $f(x)=x^2+a\cdots$①に対し，方程式 $f(f(x))=x\cdots$② の実数解の個数が，ちょうど 2 つとなる定数 a の取り得る値の範囲を求めよ。　(早稲田大)

レクチャー　これは“合成関数(ごうせいかんすう)”と 2 次方程式の応用問題なんだね。ここで，合成関数は，数 I·A の範囲を越えるけれど，受験問題としては，今回のように出題される可能性があるので，その解法パターンを例を使って解説しておこう。

(ex) $g(x)=2x-1$，$h(x)=x^2+1$ のとき，この 2 つの関数 $g(x)$ と $h(x)$ の合成関数は，次のように 2 通り存在する。

(i) $h(g(x))=\{g(x)\}^2+1=(2x-1)^2+1=4x^2-4x+2$ となる。

これは，$h\circ g(x)$ とも表す。$h(x)$ の x に $g(x)$ を代入すればいい。

(ii) $g(h(x))=2\cdot h(x)-1=2(x^2+1)-1=2x^2+1$ となる。

これは，$g\circ h(x)$ とも表す。$g(x)$ の x に $h(x)$ を代入すればいい。

どう？要領はつかめた？今回の問題では，$f(x)=x^2+a$ より，合成関数 $f\circ f(x)=f(f(x))=\{f(x)\}^2+a=(x^2+a)^2+a$ となるんだね。大丈夫？

関数 $f(x)=x^2+a\ \cdots$①より，

方程式：$f(f(x))=x\ \cdots$②は，

$$\{f(x)\}^2+a=(x^2+a)^2+a=x^4+2ax^2+a^2+a$$

$$x^4+2ax^2+a^2+a=x$$

$$x^4+2ax^2-x+a^2+a=0\cdots③\ \text{となる。}$$

これは，x の 4 次方程式だけれど，a に着目すると，これは次のように a の 2 次方程式と考えることができるので，これで左辺を因数分解できる。

$$a^2+(2x^2+1)a+\underbrace{x^4-x}_{x(x^3-1)}=0$$

ここで，③を a の 2 次方程式と考えて変形すると，

$$a^2+(2x^2+1)a+x\underbrace{(x^3-1)}_{x^3-1^3=(x-1)(x^2+x+1)}=0$$

公式：$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ を利用した！

$$a^2+(2x^2+1)a+x(x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$a^2+(2x^2+1)a+(x^2-x)(x^2+x+1)=0$$

$$\begin{array}{ccccc}1 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & x^2-x & \to & x^2-x\\ 1 & & x^2+x+1 & \to & x^2+x+1\ (+\\ & & & & \overline{2x^2+1}\end{array}$$

$$\{a+(x^2-x)\}\{a+(x^2+x+1)\}=0$$

$$(x^2-x+a)(x^2+x+a+1)=0$$

以上より，方程式 $f(f(x))=x$ …②は，

(i) $x^2-x+a=0$………④

または，

(ii) $x^2+x+a+1=0$ …⑤に分解される。

④，⑤は，文字定数 a を含む 2 次方程式の問題になっている。このような場合"文字定数 a を分離する" ことがポイントで $g(x)=a$ の形にもち込むと，この実数解は，2 次関数 $y=g(x)$ と $y=a$ のグラフの共有点の x 座標になるんだね。

(i) $x^2-x+a=0$ ……④より，

$-x^2+x=a$ ← 文字定数 a を分離

ここで，

$$\begin{cases} y=g(x)=-x^2+x \cdots ④' \\ y=a \cdots\cdots ④'' \end{cases}$$

x 軸と平行な直線

とおくと，④の実数解は，

$y=g(x)=-(x^2-1\cdot x)$

$=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$ …④′ と，

$y=a$ ……④″ のグラフの共有点の x 座標に等しい。

(ii) $x^2+x+a+1=0$ ……⑤より，

$-x^2-x-1=a$ ← 文字定数 a を分離

ここで，

$$\begin{cases} y=h(x)=-x^2-x-1 \cdots\cdots ⑤' \\ y=a \cdots\cdots ⑤'' \end{cases}$$

とおくと，⑤の実数解は，

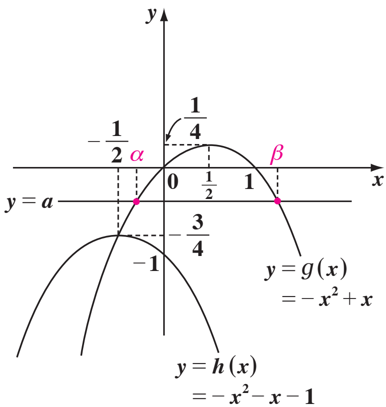
$y=h(x)=-(x^2+x)-1$

$=-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{4}$ …⑤′ と，

$y=a$……⑤″ のグラフの共有点の x 座標に等しい。

以上 (i)(ii) より，方程式 $f(f(x))=x$ …②がちょうど 2 つの実数解 α，β をもつための定数 a の値の範囲は，下の $y=g(x)$，$y=h(x)$，$y=a$ のグラフから明らかに，

$-\dfrac{3}{4}\leqq a<\dfrac{1}{4}$ である。…………(答)



参考

上のグラフから，方程式 $f(f(x))=x$ …②の実数解の個数が，

・$a>\dfrac{1}{4}$ のとき，0 個

・$a=\dfrac{1}{4}$ のとき，1 個

・$a<-\dfrac{3}{4}$ のとき，4 個　となることも読み取れるんだね。自分で確認しておこう。