補充問題 2	$F(n+1)=rF(n)$ 型漸化式	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

次の漸化式を解け。

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=-a_n+3\cdot2^n$ ……① $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $a_1=-1,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+n$ ……② $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

ヒント！ 初めからトライ！問題 **148** と同様の問題で，(1)，(2) 共に，自分で $F(n+1)=r\cdot F(n)$ の形にもち込む問題だね。(1) では，$F(n)=a_n+\alpha\cdot2^n$ とおき，(2) では $F(n)=a_n+\alpha n+\beta$ とおいて，定数 α や β の値を決定して解いていけばいいんだね。頑張ろう！

解答＆解説

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=\underline{\underline{-1}}\cdot a_n+3\cdot2^n$ ……① より，①が

$F(n+1)=\underline{\underline{-1}}\cdot F(n)$ ……………①′で表される

ように考える。ここで，定数 α を用いて，

①の式の形より，定数 α を用いて，$F(n)=a_n+\alpha\cdot2^n$ $F(n+1)=a_{n+1}+\alpha\cdot2^{n+1}$ とおくとうまくいくはずだ。

$\begin{cases} F(n)=a_n+\alpha\cdot2^n & \text{………………③ とおくと，}\\ F(n+1)=a_{n+1}+\alpha\cdot2^{n+1} & \text{………③′ となる。}\end{cases}$

③，③′を①′に代入して，

$a_{n+1}+\underbrace{\alpha\cdot2^{n+1}}_{2\alpha\cdot2^n}=-1\cdot(a_n+\alpha\cdot2^n)$ ……④ これを変形して，

$a_{n+1}=-a_n\underbrace{-\alpha\cdot2^n-2\alpha\cdot2^n}_{-(\alpha+2\alpha)\cdot2^n=-3\alpha\cdot2^n}$

$a_{n+1}=-a_n\underbrace{-3\alpha\cdot2^n}_{3}$ ………①″ ここで，①と①″を比較すると，

$-3\alpha=3$ ∴ $\alpha=-1$ これを④に代入して，

$a_{n+1}-2^{n+1}=-1\cdot(a_n-2^n)$

$[\ F(n+1)=-1\cdot\ F(n)\ ]$

アッ！

$a_n-2^n=(\underbrace{a_1}_{1}-2^1)\cdot(-1)^{n-1}$

$[\ F(n)=\ F(1)\ \cdot(-1)^{n-1}]$

これに $a_1=1$ を代入すると，一般項 a_n が次のように求められる。

$a_n=2^n+(-1)^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ ………………………………………(答)

(2) $a_1=-1$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+n$ ………② より，②が，

$F(n+1)=\frac{1}{2}\cdot F(n)$ ……………②′ で表される

ように考える。ここで，定数 α，β を用いて，

$$\begin{cases} F(n)=a_n+\alpha\cdot n+\beta & \cdots\cdots⑤ \text{ とおくと，} \\ F(n+1)=a_{n+1}+\alpha\cdot(n+1)+\beta & \cdots\cdots⑤' \text{ となる。} \end{cases}$$

②の式の形より，
定数 α，β を用いて，
$F(n)=a_n+\alpha\cdot n+\beta$
$F(n+1)=a_{n+1}+\alpha\cdot(n+1)+\beta$
とおくと，うまくいく！

⑤，⑤′を②′に代入して，

$$a_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=\frac{1}{2}(a_n+\alpha n+\beta) \cdots\cdots⑥$$

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\underbrace{\frac{\alpha}{2}n+\frac{\beta}{2}-\alpha n-\alpha-\beta}_{\left(\frac{\alpha}{2}-\alpha\right)n-\alpha-\beta+\frac{\beta}{2}=-\frac{\alpha}{2}\cdot n-\alpha-\frac{\beta}{2}}$$

$$\therefore a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n\underbrace{-\frac{\alpha}{2}}_{1}\cdot n\underbrace{-\alpha-\frac{\beta}{2}}_{0} \cdots②''$$ となる。ここで，②と②″を比較すると，

$-\frac{\alpha}{2}=1$，$-\alpha-\frac{\beta}{2}=0$ より，

$\alpha=-2$，$\beta=4$　これらを⑥に代入して，

・$-\frac{\alpha}{2}=1$ より，$\alpha=-2$
・$-(-2)-\frac{\beta}{2}=0$ より，
$\frac{\beta}{2}=2$　$\therefore \beta=4$

$$a_{n+1}-2(n+1)+4=\frac{1}{2}(a_n-2n+4)$$

$$\left[\quad F(n+1) \quad = \frac{1}{2}\cdot \quad F(n) \quad\right]$$

これも，アッ！

$$a_n-2n+4=(\underbrace{a_1}_{-1}-2\cdot1+4)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\left[\quad F(n) \quad = \quad F(1) \quad\cdot\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$$

これに $a_1=-1$ を代入して，求める一般項 a_n を求めると，

$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2n-4$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ である。………………………(答)