

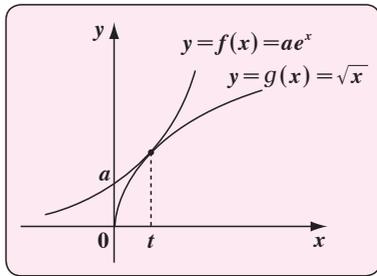
● 2 曲線の共接条件と面積計算の問題も解いてみよう!

2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共接条件と、面積計算を組み合わせた問題も、よく出題されるので、次の問題で練習しておこう。

練習問題 50	面積計算 (IV)	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3
<p>2 曲線 $y=f(x)=ae^x$ と $y=g(x)=\sqrt{x}$ が、$x=t$ で接するものとする。このとき、次の各問いに答えよ。</p> <p>(1) t と a の値を求めよ。</p> <p>(2) 2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ と y 軸とで囲まれる図形の面積 S を求めよ。</p>				

(1) 2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が、 $x=t$ で接するための条件は、 $f(t)=g(t)$ かつ $f'(t)=g'(t)$ なんだね。これから、 t と a の値を求められる。(2) は、グラフより $\int_0^t \{f(x)-g(x)\} dx$ を計算すればいい。2 曲線の共接条件 (P112) と面積計算の融合問題なんだね。

(1) $\begin{cases} y=f(x)=ae^x & \dots\dots ① \\ y=g(x)=\sqrt{x} & \dots\dots ② \end{cases}$ について、導関数 $f'(x)$ と $g'(x)$ を求めると、
 $f'(x)=(ae^x)'=a \cdot e^x \dots\dots ①'$
 $g'(x)=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \dots\dots ②'$



となる。よって、2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $x=t$ で接するとき、①、②、①'、②' より、

$$\begin{cases} ae^t = \sqrt{t} & \dots\dots ③ \\ ae^t = \frac{1}{2\sqrt{t}} & \dots\dots ④ \end{cases} \text{となる。}$$

2 曲線の共通条件
 $\begin{cases} f(t)=g(t) \\ f'(t)=g'(t) \end{cases}$

ここで、 $\frac{③}{④}$ を計算すると、 $\frac{ae^t}{ae^t} = \frac{\sqrt{t}}{\frac{1}{2\sqrt{t}}}$ $1=2t$ より、 $t=\frac{1}{2} \dots\dots ⑤$

⑤を③に代入して、 $ae^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ より、 $a = \frac{1}{\sqrt{2e}} \dots\dots ⑥$ となって、答えだ。

(2)(1)の結果より,

$$y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2e}} e^x \text{ と}$$

$$y = g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \text{ と}$$

y軸とで囲まれる図形の

面積 S は、右図より、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{1}{2}} \underbrace{\{f(x) - g(x)\}}_{\substack{\text{上側} \\ \text{下側}}} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2e}} \cdot e^x - x^{\frac{1}{2}} \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2e}} \int_0^{\frac{1}{2}} e^x dx - \int_0^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2e}} [e^x]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} [x^{\frac{3}{2}}]_0^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2e}} \left(\underbrace{e^{\frac{1}{2}}}_{\sqrt{e}} - \underbrace{e^0}_{1} \right) - \frac{2}{3} \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{2}} - \underbrace{0^{\frac{3}{2}}}_{0} \right\}$$

$$\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

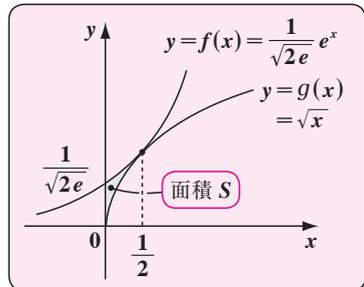
$$= \frac{1}{\sqrt{2e}} (\sqrt{e} - 1) - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2e}} - \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{3-1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2e}}$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2e}}$$

∴求める面積 $S = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2e}}{2e}$ となって、答えが求められるんだね。

$$\begin{aligned} y &= f(x) = ae^x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2e}} e^x \\ y &= g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$



どう？この位練習すれば、数学Ⅲの面積計算にも自信が付いたでしょう？