

● 2曲線の共接条件と面積計算の問題も解いてみよう!

2つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共接条件と、面積計算を組み合わせた問題も、よく出題されるので、次の問題で練習しておこう。

練習問題 50

面積計算 (IV)

CHECK 1

CHECK 2

CHECK 3

2 曲線 $y=f(x)=ae^x$ と $y=g(x)=\sqrt{x}$ が、 $x=t$ で接するものとする。このとき、次の各問いに答えよ。

(1) t と a の値を求めよ。

(2) 2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ と y 軸とで囲まれる図形の面積 S を求めよ。

(1) 2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が、 $x=t$ で接するための条件は、 $f(t)=g(t)$ かつ $f'(t)=g'(t)$ なんだね。これから、 t と a の値を求められる。(2) は、グラフより $\int_0^t \{f(x)-g(x)\} dx$ を計算すればいい。2 曲線の共接条件 (P112) と面積計算の融合問題なんだね。

$$(1) \begin{cases} y=f(x)=ae^x & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ y=g(x)=\sqrt{x} & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

ついて、導関数 $f'(x)$ と $g'(x)$ を求めると、

$$f'(x)=(ae^x)'=a \cdot e^x \cdots \cdots \textcircled{1}'$$

$$g'(x)=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdots \cdots \textcircled{2}'$$

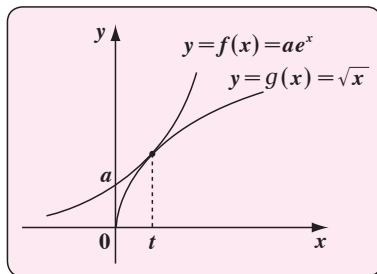
となる。よって、2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$

が $x=t$ で接するとき、①、②、①'、②' より、

$$\begin{cases} ae^t=\sqrt{t} & \cdots \cdots \textcircled{3} \\ ae^t=\frac{1}{2\sqrt{t}} & \cdots \cdots \textcircled{4} \end{cases} \text{となる。}$$

ここで、 $\frac{\textcircled{3}}{\textcircled{4}}$ を計算すると、 $\frac{ae^t}{ae^t}=\frac{\sqrt{t}}{\frac{1}{2\sqrt{t}}}$ $1=2t$ より、 $t=\frac{1}{2}$ $\cdots \textcircled{5}$

⑤を③に代入して、 $ae^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$ より、 $a=\frac{1}{\sqrt{2e}}$ $\cdots \cdots \textcircled{6}$ となって、答えだ。



2 曲線の共通条件
 $\begin{cases} f(t)=g(t) \\ f'(t)=g'(t) \end{cases}$

(2)(1)の結果より,

$$y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2e}} e^x \text{ と}$$

$$y = g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \text{ と}$$

y軸とで囲まれる図形の

面積 S は、右図より、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{1}{2}} \underbrace{\{f(x) - g(x)\}}_{\substack{\text{上側} \\ \text{下側}}} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2e}} \cdot e^x - x^{\frac{1}{2}} \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2e}} \int_0^{\frac{1}{2}} e^x dx - \int_0^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2e}} [e^x]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} [x^{\frac{3}{2}}]_0^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2e}} \left(\underbrace{e^{\frac{1}{2}}}_{\sqrt{e}} - \underbrace{e^0}_{1} \right) - \frac{2}{3} \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}} \right\}$$

$$\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

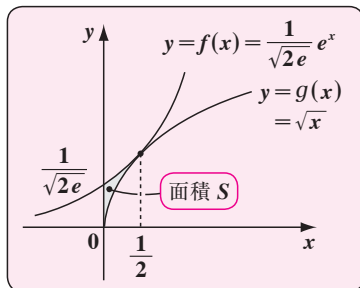
$$= \frac{1}{\sqrt{2e}} (\sqrt{e} - 1) - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2e}} - \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{3-1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2e}}$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2e}}$$

∴求める面積 $S = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2e}}{2e}$ となって、答えが求められるんだね。

$$\begin{aligned} y &= f(x) = ae^x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2e}} e^x \\ y &= g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$



どう？この位練習すれば、数学Ⅲの面積計算にも自信が付いたでしょう？