微分方程式 (Ⅲ)

演習問題 94　難易度 ★★★　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

微分方程式：$y' = \dfrac{3y-2x}{x}$ ……① $(x \neq 0)$ について，

次の各問いに答えよ。

(1) $\dfrac{y}{x} = u$ とおいて，y' を x と u と u' の式で表せ。

(2) u を x の関数 $u(x)$ として，$u(x)$ を求めよ。

(3) ①の解で，$x=1$ のとき $y=3$ をみたすものを求めよ。

レクチャー ①は，変数分離形ではないけれど，$y' = 3\cdot\dfrac{y}{x} - 2$ となって，$y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ の形になっている。これを"同次形(どうじけい)"の微分方程式といい，この場合 $\dfrac{y}{x} = u$ とおくと，$y = xu$ より，この両辺を x で微分して，

$y' = (xu)' = \underbrace{x'}_{1}u + xu' = u + xu'$ となる。これを，$y' = f(u)$ に代入すると，

$u + xu' = f(u)$ より，$x\cdot\dfrac{du}{dx} = f(u) - u$　$\dfrac{du}{dx} = \dfrac{f(u)-u}{x}$ となって，変数分離形になるんだね。これから $u(x)$ を求めて，y を求めよう。

解答＆解説

ココがポイント

(1) ①より，$y' = 3\cdot\dfrac{y}{x} - 2$ ……①$'$ $(x \neq 0)$ となる。

ここで，$\dfrac{y}{x} = u$ ……② とおくと，

$y = x\cdot u$ …②$'$ より，この両辺を x で微分すると，

$y' = (xu)' = 1\cdot u + xu' = u + xu'$……③ となる。

……(答)

⇦ $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ の形の同次形の微分方程式では，$\dfrac{y}{x} = u$ とおいて u と x の変数分離形の微分方程式にもち込むんだね。

(2) ②と③を①$'$ に代入して，

$u + x\cdot u' = 3u - 2$ となる。よって，

$x\cdot u' = 2(u-1)$ より，

$\dfrac{du}{dx} = \dfrac{2(u-1)}{x}$ となる。よって，$u \neq 1$ のとき，

⇦ x と u の変数分離形の微分方程式になった。

$\displaystyle\int\frac{1}{u-1}du = 2\int\frac{1}{x}dx$ より，

$\log|u-1| = 2\cdot\log|x| + C_1$

$\log\underline{|u-1|} = \log\underline{C_2x^2}$ $(\log C_2 = C_1)$ となる。

よって，真数同士を比較して，

$|u-1| = C_2x^2$ より，

$u - 1 = \underbrace{\pm C_2}_{C\text{とおく}}\cdot x^2$ となるので，

$u(x) = Cx^2 + 1$ ……④　$(C = \pm C_2(\neq 0))$

$u = 1\left(=\dfrac{y}{x}\right)$，すなわち $y = x$ のとき，

$y' = x' = 1$ より，$y = x$ は①の解の 1 つである。

以上より，求める関数 $u(x)$ は，

$u(x) = Cx^2 + 1$ ……④′ となる。………………(答)

(ただし，C は任意の実数定数)

(3) ここで，$y = x\cdot\underbrace{u}_{u(x)}$ ……②′ より，

④′を②′に代入すると，

$y = x(Cx^2+1) = Cx^3 + x$ ……⑤ となる。

ここで，$x = 1$ のとき $y = 3$ の条件をみたすものは，これらを⑤に代入して，

$3 = C\cdot 1^3 + 1$　$\therefore C = 3 - 1 = 2$

よって，求める①の解 (特殊解) は，⑤より，

$y = 2x^3 + x$ である。 ………………………………(答)

⇦ 右辺 $= \log\underbrace{|x|^2}_{x^2} + \underbrace{\log C_2}_{C_1}$
$= \log C_2x^2$
(真数条件 $C_2 > 0$)

⇦ $y' = 1$ と $y = x$ を①の両辺に代入して成り立つから，$y = x$ は①の解の 1 つだね。

⇦ $C = 0$ のとき，④′は，$u = 1$
$\therefore \dfrac{y}{x} = 1$ より，$\underline{y = x}$ が導かれる。
①の解の 1 つ

⇦ これは，微分方程式：
$y' = \dfrac{3y-2x}{x}$ …① の
一般解なんだね。

これで，同次形の微分方程式：$y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ の解法パターン，すなわち $\dfrac{y}{x} = u$ とおいて u と x の変数分離形の微分方程式にもち込んで，まず $u(x)$ を求め，そして一般解 $y = x\cdot u(x)$ を求める手法も理解できたでしょう？
これも，受験問題で出題されるかも知れないので，よく練習しておこう！