補充問題 3	三角比の図形への応用	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

三角形 ABC の面積は $9\sqrt{3}$ であり，$\dfrac{\sin A}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sin B}{\sqrt{7}}=\sin C$ ……① が成り立つものとする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) $\cos B$ と頂角 $\angle B$ の値を求めよ。

(2) 三角形 ABC の外接円の半径 R を求めよ。　　(明治薬大＊)

Babaのレクチャー

一般に，$\dfrac{x}{\alpha}=\dfrac{y}{\beta}=\dfrac{z}{\gamma}$ ……㋐ $(\alpha\neq0,\ \beta\neq0,\ \gamma\neq0)$ の形の式が与えられたならば，㋐ $=k$(定数) とおくことにより，$\dfrac{x}{\alpha}=k$，$\dfrac{y}{\beta}=k$，$\dfrac{z}{\gamma}=k$ となるので，$x=k\alpha$，$y=k\beta$，$z=k\gamma$ となる。よって，$x:y:z=\cancel{k}\alpha:\cancel{k}\beta:\cancel{k}\gamma=\alpha:\beta:\gamma$ より，$x:y:z=\alpha:\beta:\gamma$ …㋑ が導ける。この㋐と㋑は，同値な関係なので，$\dfrac{x}{\alpha}=\dfrac{y}{\beta}=\dfrac{z}{\gamma}$ ……㋐ $\Longleftrightarrow$ $x:y:z=\alpha:\beta:\gamma$ ……㋑ と覚えておこう。

したがって，正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ $(=2R(\text{定数}))$ は㋐の形をしているので，これは $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$ と変形できる。また，今回の問題では，$\dfrac{\sin A}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sin B}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sin C}{1}$ ……① が与えられているので，これも㋐の形をしているから，$\sin A:\sin B:\sin C=\sqrt{3}:\sqrt{7}:1$ と変形することができるんだね。

解答＆解説

(1) $\dfrac{\sin A}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sin B}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sin C}{1}$ ……① より，

$\sin A:\sin B:\sin C=\sqrt{3}:\sqrt{7}:1$ ……①′ となる。

また，正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ $(=2R)$ …② (R：外接円の半径)

$(a=BC,\ b=CA,\ c=AB)$ より，

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$ ……②′ となる。

①´と②´より，$a:b:c=\sqrt{3}:\sqrt{7}:1$

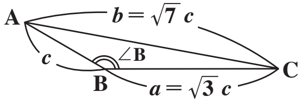
$x:y:z=\alpha:\beta:\gamma \iff \dfrac{x}{\alpha}=\dfrac{y}{\beta}=\dfrac{z}{\gamma}$

$\therefore \underset{(\mathrm{i})}{\dfrac{a}{\sqrt{3}}}=\underset{(\mathrm{ii})}{\dfrac{b}{\sqrt{7}}}=\dfrac{c}{1}$ となる。よって，

(i) $\dfrac{a}{\sqrt{3}}=c$ より，$a=\sqrt{3}\,c$ ……③，

(ii) $\dfrac{b}{\sqrt{7}}=c$ より，$b=\sqrt{7}\,c$ ……④ となる。

ここで，余弦定理より，



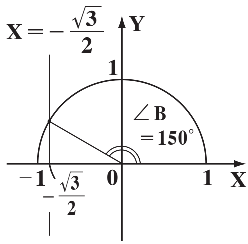
$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$ ……⑤ である。よって，

⑤に③，④を代入して，

$$\cos B=\frac{c^2+(\sqrt{3}\,c)^2-(\sqrt{7}\,c)^2}{2c\cdot\sqrt{3}\,c}=\frac{(1+3-7)\cancel{c^2}}{2\sqrt{3}\,\cancel{c^2}}=\frac{-3}{2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ \cdots⑥\ \cdots(\text{答})$$

⑥より，求める頂角∠B は，

$\angle B=150^\circ$ である。……………………(答)



(2) 次に，三角形 ABC の面積を S とおくと，

$$S=\boxed{\frac{1}{2}\cdot c\cdot\underbrace{a}_{\sqrt{3}\,c\ (③\text{より})}\cdot\underbrace{\sin B}_{\sin150^\circ=\frac{1}{2}}=9\sqrt{3}}\ \text{より，}$$

$\dfrac{1}{2}\cdot c\cdot\cancel{\sqrt{3}}\,c\cdot\dfrac{1}{2}=9\cancel{\sqrt{3}}\qquad c^2=36\qquad \therefore c=\sqrt{36}=6\quad(\because c>0)$

よって，④より，$b=\sqrt{7}\,c=6\sqrt{7}$

ここで，三角形 ABC に正弦定理を用いると，

$\dfrac{b}{\sin B}=2R$ より，求める三角形 ABC の外接円の半径 R は，

$R=\dfrac{6\sqrt{7}}{2\cdot\sin150^\circ}=\dfrac{6\sqrt{7}}{\cancel{2}\times\dfrac{1}{\cancel{2}}}=6\sqrt{7}$ である。………………………………(答)