初めからトライ！問題 119	区分求積法	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

次の極限を定積分で表して，その値を求めよ。

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\cos\frac{\pi}{n}+2\cos\frac{2\pi}{n}+3\cos\frac{3\pi}{n}+\cdots+n\cdot\cos\frac{n\pi}{n}\right)\quad\cdots\cdots①$$

ヒント！ ①を変形して，区分求積法の公式：$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$ を使える形にもち込めばいいんだね。頑張ろう！

解答＆解説

①を変形して，

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\left(1\cdot\cos\frac{\pi\cdot1}{n}+2\cdot\cos\frac{\pi\cdot2}{n}+3\cdot\cos\frac{\pi\cdot3}{n}+\cdots+n\cdot\cos\frac{\pi\cdot n}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{n}\cos\left(\pi\cdot\frac{1}{n}\right)+\frac{2}{n}\cdot\cos\left(\pi\cdot\frac{2}{n}\right)+\frac{3}{n}\cdot\cos\left(\pi\cdot\frac{3}{n}\right)+\cdots+\frac{n}{n}\cdot\cos\left(\pi\cdot\frac{n}{n}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\frac{k}{n}\cos\left(\pi\cdot\frac{k}{n}\right)}_{f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

区分求積法の公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$=\int_0^1\underbrace{x\cdot\cos\pi x}_{f(x)}\,dx$$

よって，この定積分を部分積分法を用いて計算すると，

$$I=\int_0^1 x\left(\frac{1}{\pi}\sin\pi x\right)'dx$$

部分積分法

$$\int_0^1 f\cdot g'dx=[f\cdot g]_0^1-\int_0^1 f'\cdot g\,dx$$

$$=\cancel{\frac{1}{\pi}\underbrace{[x\sin\pi x]_0^1}_{1\cdot\sin\pi-0\cdot\sin0=0-0=0}}-\frac{1}{\pi}\int_0^1 1\cdot\sin\pi x\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi^2}[\cos\pi x]_0^1=\frac{1}{\pi^2}(\underbrace{\cos\pi}_{-1}-\underbrace{\cos0}_{1})=\frac{1}{\pi^2}(-1-1)=-\frac{2}{\pi^2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$