補充問題 2	難易度 ★★	三角比と正四面体

1 辺の長さが 4 の正四面体 **ABCD** において，辺 **BC** の中点を **M** とし，頂点 **A** から線分 **DM** に下ろした垂線を **AH** とする。$\angle AMD = \theta$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\cos\theta$ の値を求めよ。

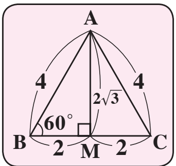
(2) △**AMD** の内接円の半径を求めよ。

(3) 三角錐 **AMCH** の体積を求めよ。 (北里大)

ヒント！ 典型的な正四面体の問題をもう 1 題解いておこう。まず，図を描いて，(1), (2) では正面体の断面の△**AMD** に着目して解いていこう。(3) 三角錐 **AMCH** は，底面が△**MCH** で高さが **AH** の三角錐と考えて，その体積を計算しよう。

解答＆解説

右図に示すように 1 辺の長さが 4 の正面体 **ABCD** の辺 **BC** の中点を **M** とし，**A** から **DM** に下した垂線を **AH** とする。$\angle AMD = \theta$ とおく。



(1) △**ABC** は 1 辺の長さが 4 の正三角形より，中線 **AM** の長さは，$AM = 2\sqrt{3}$ となる。

△**ABM** は，
AB : **BM** : **MA**
$= 2 : 1 : \sqrt{3}$ の
直角三角形

同様に，$MD = 2\sqrt{3}$

よって，△**AMD** は，

$AM = MD = 2\sqrt{3}$，$AD = 4$ の二等辺三角形より，
△**AMD** に余弦定理を用いると，

$$4^2 = (2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\cos\theta$$

$$[\ AD^2 = AM^2 + MD^2 - 2\cdot AM\cdot MD\cdot\cos\theta\ ]$$

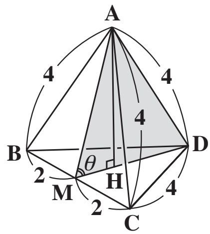
$16 = 12 + 12 - 24\cdot\cos\theta$ より，

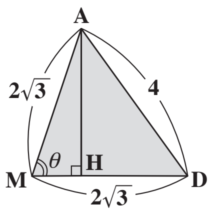
$\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ である。……………………………(答)

(2) $0^\circ < \theta < 90^\circ$ より，$\sin\theta > 0$

$$\therefore \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

ココがポイント





⇦ $24\cos\theta = 24 - 16 = 8$

$\cos\theta = \dfrac{8}{24} = \dfrac{1}{3}$

⇦ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\sin\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$

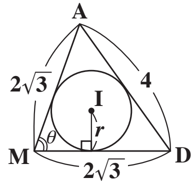
$\sin\theta > 0$ より，

$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$

よって，$\triangle$**AMD** の面積を S とおくと，

$$S=\frac{1}{2}\cdot AM\cdot MD\cdot\sin\theta=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2\sqrt{3}}\cdot 2\cancel{\sqrt{3}}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\cancel{3}}$$

$$=4\sqrt{2}\ \text{となる。}$$



ここで，$\triangle$**AMD** の内接円の半径を r とおくと，

$$S=\frac{1}{2}(AM+MD+DA)\cdot r\ \text{より，}$$

$$4\sqrt{2}=\frac{1}{2}(2\sqrt{3}+2\sqrt{3}+4)\cdot r$$

⇦ $4\sqrt{2}=\frac{1}{2}(4\sqrt{3}+4)\cdot r$

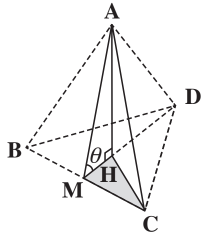
$r=\frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+2}$

$=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$

$$r=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}=\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{2(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}$$

$=\sqrt{6}-\sqrt{2}$ となる。……………………………(答)

(3) 三角錐 **AMCH** は，右図に示すように，$\triangle$**MCH** を底面とし，高さ **AH** の三角錐より，その体積を V とおくと，



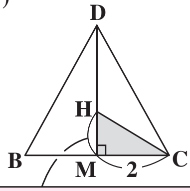
$$V=\frac{1}{3}\times\triangle MCH\times AH\ \cdots\cdots①\ \text{である。}$$

(i) 右図に示すように，点 **H** は正三角形 **DBC** の重心より，

$$HM=\frac{1}{3}\cdot MD=\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore\triangle MCH=\frac{1}{2}\cdot MC\cdot HM=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\ \cdots②$$

(i)



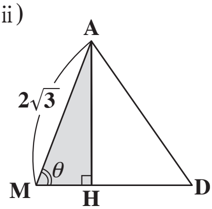
$\frac{1}{3}\cdot MD=\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(ii) 次に直角三角形 **AMH** に着目すると，

$$\sin\theta=\frac{AH}{AM}\ \text{より，}$$

$$AH=AM\cdot\sin\theta=2\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4\sqrt{6}}{3}\ \cdots\cdots③$$

(ii)



$\left(\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

以上 (i)(ii) より，②，③を①に代入して，求める三角錐 **AMCH** の体積 V は，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{4\sqrt{6}}{3}=\frac{8\times3\sqrt{2}}{27}=\frac{8\sqrt{2}}{9}\ \text{である。}$$

………(答)