連続型確率分布と期待値

絶対暗記問題 57	難易度 ★★	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

確率密度 $f(x)$ が，$f(x)=\begin{cases} ax+b & (0 \leqq x \leqq 3) \\ 0 & (x<0,\ 3<x) \end{cases}$ $(a,\ b$：定数$)$ で定義されており，この $f(x)$ に従う確率変数 X の期待値 $m=E(X)=\dfrac{7}{4}$ である。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) $a,\ b$ の値を求めよ。

(2) 確率 $P(c \leqq X \leqq 3)=\dfrac{4}{9}$ であるとき，定数 c の値を求めよ。

ヒント！ (1) 確率密度 $f(x)$ は，$0 \leqq x \leqq 3$ のときのみ $f(x)=ax+b$ であり，その他の x では $f(x)=0$ より，まず，$\int_0^3 f(x)dx=1$ (全確率) をみたす。次に，期待値 (平均) $m=\dfrac{7}{4}$ より，$\int_0^3 x\cdot f(x)=\dfrac{7}{4}$ となる。以上から，a と b の値を求めよう。次に，(2) $P(c \leqq x \leqq 3)=\int_c^3 f(x)dx=\dfrac{4}{9}$ から，c の値を求めればいいんだね。

解答＆解説

(1) 確率密度 $f(x)=\begin{cases} ax+b & (0 \leqq x \leqq 3) \\ 0 & (x<0,\ 3<x) \end{cases}$ より，

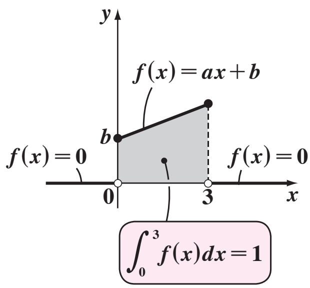
(i) $\displaystyle\int_0^3 f(x)dx=\boxed{\underbrace{\int_0^3 (ax+b)dx}_{\left[\frac{1}{2}ax^2+bx\right]_0^3=\frac{9}{2}a+3b}=1\ (\text{全確率})}$

$\therefore\ \dfrac{9}{2}a+3b=1$ より，$9a+6b=2$ ……①

(ii) X の期待値 $m=E(X)=\dfrac{7}{4}$ より，

$\displaystyle m=\int_0^3 \underbrace{x\cdot f(x)}_{x(ax+b)}dx=\boxed{\underbrace{\int_0^3 (ax^2+bx)dx}_{\left[\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2\right]_0^3=9a+\frac{9}{2}b}=\frac{7}{4}}$

イメージ



$\therefore\ 9a+\dfrac{9}{2}b=\dfrac{7}{4}$ ……②

以上①，②より a，b の値を求めると，

$a=\dfrac{1}{9}$，$b=\dfrac{1}{6}$ である。……(答)

$$\begin{cases} 9a+6b=2 & \cdots\cdots\cdots① \\ 9a+\dfrac{9}{2}b=\dfrac{7}{4} & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①－②より，$\dfrac{3}{2}b=\dfrac{1}{4}$ $\therefore\ b=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$

これを①に代入して，

$9a+1=2$ $\therefore\ a=\dfrac{1}{9}$

(2) $f(x)$ に従う確率変数 X が，

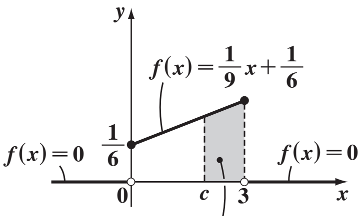
$c \leqq X \leqq 3$ となる確率が

$\underbrace{P(c \leqq X \leqq 3)}_{\boxed{\int_c^3 f(x)dx=\int_c^3\left(\frac{1}{9}x+\frac{1}{6}\right)dx}}=\dfrac{4}{9}$ であるとき，

$\displaystyle\int_c^3\left(\frac{1}{9}x+\frac{1}{6}\right)dx=\frac{4}{9}$ より，

$\underbrace{\left[\dfrac{1}{18}x^2+\dfrac{1}{6}x\right]_c^3}_{\boxed{\frac{9}{18}+\frac{3}{6}-\frac{1}{18}c^2-\frac{1}{6}c}}=\dfrac{4}{9}$

イメージ



$P(c \leqq X \leqq 3)=\displaystyle\int_c^3 f(x)dx=\frac{4}{9}$

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{18}c^2-\dfrac{1}{6}c=\dfrac{4}{9}$

$\dfrac{1}{18}c^2+\dfrac{1}{6}c+\dfrac{4}{9}-1=0$

$\dfrac{1}{18}c^2+\dfrac{1}{6}c-\dfrac{5}{9}=0$　両辺に 18 をかけて，

$c^2+3c-10=0$　$(c+5)(c-2)=0$　$\therefore\ c=-5,\ 2$

ここで，明らかに $0<c<3$ より，求める定数 c の値は，$c=2$ である。

……(答)

参考

変数 X の分散 $V(X)$ は，

$$V(X)=\int_0^3 x^2\cdot f(x)dx=\int_0^3\left(\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{6}x^2\right)dx-\left(\frac{7}{4}\right)^2$$

$$=\left[\frac{1}{36}x^4+\frac{1}{18}x^3\right]_0^3-\frac{49}{16}=\frac{9}{4}+\frac{3}{2}-\frac{49}{16}=\frac{15}{4}-\frac{49}{16}$$

$=\dfrac{60-49}{16}=\dfrac{11}{16}$ となるんだね。