> 例題 6　ベクトル場 $\boldsymbol{f}=[x^2,\ y^2,\ z^2]$ において 3 つの座標平面と平面 π：$x+y+z=2$ とで囲まれる領域を V とおく。また，V を囲む閉曲面を S とおく。このとき，面積分 $\iint_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ を求めよ。(ただし，$\boldsymbol{n}$ は S の内部から外部に向かう単位法線ベクトルとする。)

今回の閉曲面 S は，図(i)に示すように，四面体の 4 つの面 $S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4$ から成るので，面積分 $\iint_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ は，

$\iint_S=\iint_{S_1}+\iint_{S_2}+\iint_{S_3}+\iint_{S_4}$ となって，

4 つの面積分の総和となるため計算がメンドウなんだね。よって，ここでガウスの発散定理：

$$\iint_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\iiint_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{f}\,dV \quad \cdots\cdots(*)$$

を用いて，体積分で求めることにする。

まず，ベクトル場 $\boldsymbol{f}=[x^2,\ y^2,\ z^2]$ の発散をとると，

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{f}=\underbrace{\frac{\partial(x^2)}{\partial x}}_{2x}+\underbrace{\frac{\partial(y^2)}{\partial y}}_{2y}+\underbrace{\frac{\partial(z^2)}{\partial z}}_{2z}$$

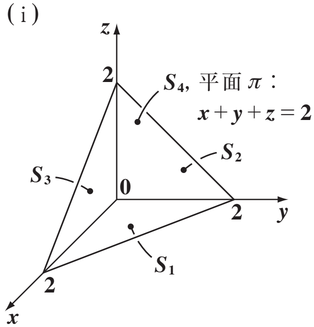
$=2(x+y+z)$ より，$(*)$ から，

$$\iint_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\int_0^2\left\{\int_0^{2-x}\left(\int_0^{2-x-y}\underbrace{\mathrm{div}\,\boldsymbol{f}}_{2(x+y+z)}\,dz\right)dy\right\}dx$$

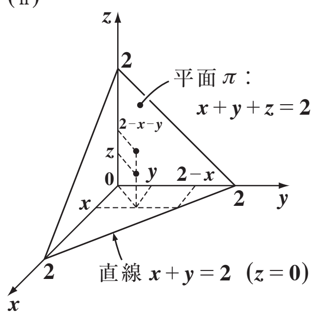
となる。

よって，この体積分を実行すると，

図(i)



図(ii)



・x が，$0\leqq x\leqq 2$ の範囲のある x の値をとるとき，
・y は，$0\leqq y\leqq 2-x$ の範囲のある y の値をとり，
・z は，$0\leqq z\leqq 2-x-y$ の範囲を動く。

$$\iint_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = 2\int_0^2\left\{\int_0^{2-x}\left(\int_0^{2-x-y}(\overbrace{x+y}^{\text{定数扱い}}+z)\,dz\right)dy\right\}dx$$

$$\left[(x+y)z+\frac{1}{2}z^2\right]_0^{2-x-y}$$

$$=(x+y)(2-x-y)+\frac{1}{2}(2-x-y)^2-\cancel{0}$$

$$=(x+y)\{2-(x+y)\}+\frac{1}{2}\{2-(x+y)\}^2$$

$$=\cancel{2(x+y)}-(x+y)^2+\frac{1}{2}\{4-\cancel{4(x+y)}+(x+y)^2\}$$

$$=2-\frac{1}{2}(x+y)^2$$

$$=2\int_0^2\left[\int_0^{2-x}\left\{2-\frac{1}{2}(\overbrace{x}^{\text{定数扱い}}+y)^2\right\}dy\right]dx$$

$$\left[2y-\frac{1}{6}(x+y)^3\right]_0^{2-x}$$

$$=2(2-x)-\frac{1}{6}(\cancel{x}+2-\cancel{x})^3-\left\{\cancel{2\cdot 0}-\frac{1}{6}(x+0)^3\right\}$$

$$=4-2x-\frac{4}{3}+\frac{1}{6}x^3=\frac{1}{6}x^3-2x+\frac{8}{3}$$

$$=2\int_0^2\left(\frac{1}{6}x^3-2x+\frac{8}{3}\right)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{24}x^4-x^2+\frac{8}{3}x\right]_0^2$$

$$=2\left(\frac{16}{24}-4+\frac{16}{3}-\cancel{0}\right)=2\left(\frac{2}{3}-4+\frac{16}{3}\right)$$

$$=2\left(\frac{18}{3}-4\right)=2(6-4)=4$$ となる。

大丈夫だった？