補充問題 3	難易度 ★★	三角比の図形への応用

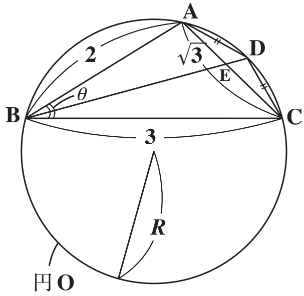
円 **O** に内接する四角形 **ABCD** において，
AB $=$ **2**，**BC** $=$ **3**，**CA** $= \sqrt{3}$，**AD** $=$ **CD**
とする。また，**AC** と **BD** の交点を **E**，
$\angle$**ABC** $=\theta$ とおく。

(1) $\cos\theta$ と $\sin\theta$，および円 **O** の外接円の半径 R を求めよ。

(2) **AE**，**AD**，**BD** の長さを求めよ。

(3) 四角形 **ABCD** の面積 S を求めよ。

（京都産業大＊）



ヒント！ (1) では△**ABC** に余弦定理を用いて $\cos\theta$ を求め，さらに $\sin\theta$ を求めて，正弦定理から半径 R を求めよう。(2) 頂角の 2 等分線の公式や，余弦定理，トレミーの定理を利用しよう。(3) は，2 つの三角形△**ABC** と△**ACD** の面積の和として計算すればいい。

解答＆解説

(1) △**ABC** に余弦定理を用いると，

$$\cos\theta=\frac{2^2+3^2-(\sqrt{3})^2}{2\cdot2\cdot3}=\frac{4+9-3}{12}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}\quad\cdots①\cdots(\text{答})$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ かつ $\sin\theta>0$ より，①から，

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{36-25}{36}}=\frac{\sqrt{11}}{6}\quad\cdots②\cdots(\text{答})$$

△**ABC** に正弦定理を用いると，外接円の半径 R は，

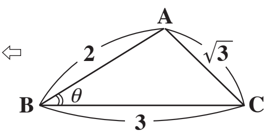
$$\frac{\sqrt{3}}{\sin\theta}=2R \text{ より，}\quad R=\frac{\sqrt{3}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{11}}{6}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{11}}=\frac{3\sqrt{33}}{11}$$

……(答)

(2) ・**AD** $=$ **CD** より $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD}$ よって，同じ長さの弧に対する円周角は等しいので，$\angle$**ABE** $=\angle$**CBE** $=\dfrac{1}{2}\theta$ となる。よって，△**ABC** について，**BE** は頂角$\angle$**ABC** の 2 等分線なので，頂角の 2 等分線の定理より，

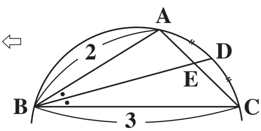
ココがポイント

⇦



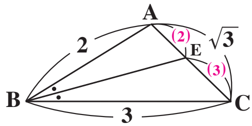
⇦ $R=\dfrac{\sqrt{3}}{\dfrac{\sqrt{11}}{\boxed{3}}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$

⇦



$AE:EC = AB:BC = 2:3$ となる。

$\therefore\ AE = \dfrac{2}{5}AC = \dfrac{2}{5}\cdot\sqrt{3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{5}$ …………(答)

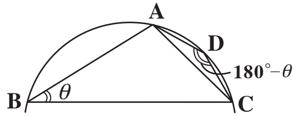


・□ABCD は円に内接する四角形なので，その内対角の和は 180° である。よって，

$\underbrace{\angle ABC}_{\theta} + \angle ADC = 180°$ より，$\angle ADC = 180° - \theta$

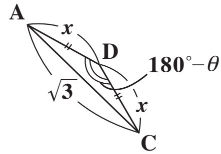
$\therefore\ \cos\angle ADC = \cos(180° - \theta) = -\cos\theta = -\dfrac{5}{6}$

……③（①より）



ここで，△ACD について，AD = CD = x とおいて，余弦定理を用いると，

$\underbrace{\cos\angle ADC}_{-\frac{5}{6}\ (③より)} = \dfrac{x^2 + x^2 - (\sqrt{3})^2}{2\cdot x\cdot x}$ より，$-\dfrac{5}{6} = \dfrac{2x^2 - 3}{2x^2}$



$-5x^2 = 3(2x^2 - 3)$，$-5x^2 = 6x^2 - 9$，$11x^2 = 9$

$x^2 = \dfrac{9}{11}$ ……④

$\therefore\ AD = x = \sqrt{\dfrac{9}{11}} = \dfrac{3}{\sqrt{11}} = \dfrac{3\sqrt{11}}{11}$ …④′…(答)

・□ABCDにトレミーの定理を用いると，

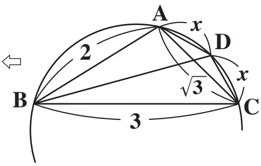
$BD \times \sqrt{3} = 3\times x + 2\times x$　$\therefore\ BD = \dfrac{5}{\sqrt{3}}\cdot x$

これに④′を代入して，

$BD = \dfrac{5}{\sqrt{3}} \times \dfrac{3\sqrt{11}}{11} = \dfrac{5\sqrt{3}\times\sqrt{11}}{11} = \dfrac{5\sqrt{33}}{11}$

……(答)

⇦



トレミーの定理：

$BD \times \sqrt{3} = x\times 3 + x\times 2$

(3) □ABCDの面積 S は，

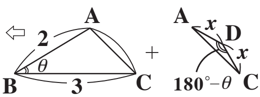
$S = \triangle ABC + \triangle ACD$

$= \dfrac{1}{2}\times 2\times 3\times \underbrace{\sin\theta}_{\frac{\sqrt{11}}{6}\ (②より)} + \dfrac{1}{2}\times \underbrace{x\times x}_{x^2 = \frac{9}{11}\ (④より)} \times \overbrace{\sin(180° - \theta)}^{\sin\theta = \frac{\sqrt{11}}{6}}$

$= 3\times\dfrac{\sqrt{11}}{6} + \dfrac{1}{2}\times\dfrac{9}{11}\times\dfrac{\sqrt{11}}{6} = \dfrac{\sqrt{11}}{2} + \dfrac{3\sqrt{11}}{44}$

$= \dfrac{22+3}{44}\cdot\sqrt{11} = \dfrac{25\sqrt{11}}{44}$ である。…………(答)

⇦



$\begin{cases} \cos(180° - \theta) = -\cos\theta \\ \sin(180° - \theta) = \sin\theta \end{cases}$