補充問題 3	放射線と 2 接線で囲まれる図形の面積	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

放物線 $C : y = f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ に対して，点 $\left(\dfrac{5}{2},\ 0\right)$ から 2 本の接線 l_1 と l_2 が引ける。(ただし，l_1 と l_2 の傾きを順に m_1，m_2 とおくと，$m_1 > m_2$ である。)

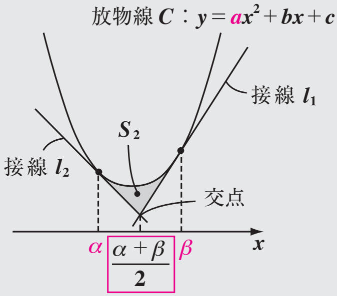
(1) 2 つの接線 l_1 と l_2 の方程式を求めよ。

(2) 放物線 C と 2 つの接線 l_1 と l_2 とで囲まれる図形の面積 S を求めよ。

Baba のレクチャー

放物線 $C : y = ax^2 + bx + c$ とその 2 つの接線 l_1，l_2 とで囲まれる部分の面積 S は，放物線と 2 接線の接点の x 座標 α, β $(\alpha < \beta)$ と，x^2 の係数 a の 3 つだけで，次の公式により，簡単に求めることができるんだね。これも覚えておこう！

$$S = \frac{|a|}{12}(\beta - \alpha)^3 \quad \cdots\cdots(*)$$



解答＆解説

(1) 放物線 $C : y = f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 3$

$$= \frac{1}{2}(x^2 \underline{-4x} + \underline{\underline{4}}) + 3 \underline{\underline{-2}}$$

2 で割って 2 乗

$$= \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1 \quad \cdots ①\text{とおく。}$$

点 $\left(\dfrac{5}{2},\ 0\right)$ を通り，傾き m の直線を l とおくと，$l : y = m\left(x - \dfrac{5}{2}\right)$ ……② となる。

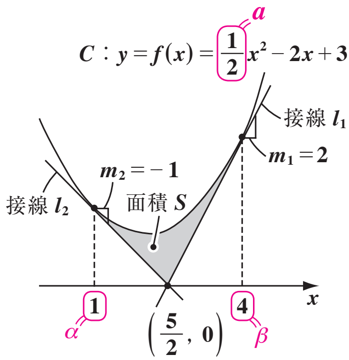
①と②より y を消去して，

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 = m\left(x - \frac{5}{2}\right)$$

両辺に 2 をかけて，

$$x^2 - 4x + 6 = 2mx - 5m$$

$x^2 - 2(m+2)x + 5m + 6 = 0$ ……③ となる。ここで，放物線 C と直線 l が接するとき，③は重解をもつ。よって，③の判別式を D とおくと，



$$\frac{D}{4}=\underbrace{(m+2)^2-(5m+6)}_{m^2+4m+4-5m-6}=m^2-m-2=\boxed{(m+1)(m-2)=0}$$ より，

$m_1=2$，$m_2=-1$ となり，2 つの接線 l_1 と l_2 の傾きが求められた。

(ⅰ) $m_1=2$ を②の m に代入すると，接線 l_1 の方程式は，

$y=2\left(x-\dfrac{5}{2}\right)=2x-5$ であり，……………………………………(答)

(ⅱ) $m_2=-1$ を②の m に代入すると，接線 l_2 の方程式は，

$y=(-1)\cdot\left(x-\dfrac{5}{2}\right)=-x+\dfrac{5}{2}$ である。……………………………(答)

(2) $m_1=2$ と $m_2=-1$ をそれぞれ③に代入して，接点の x 座標を求めると，

(ⅰ) $m_1=2$ のとき，$\underline{x^2-8x+16=0}$　　$(x-4)^2=0$

$x^2-2\cdot(2+2)x+5\cdot2+6=0$ （③より）

$\therefore\ x=4(=\beta)$ であり，また，

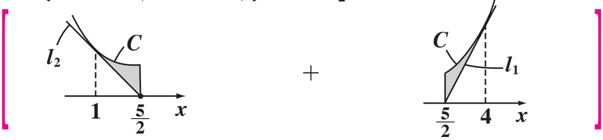
(ⅱ) $m_2=-1$ のとき，$\underline{x^2-2x+1=0}$　　$(x-1)^2=0$

$x^2-2\cdot(-1+2)x+5\cdot(-1)+6=0$ （③より）

$\therefore\ x=1(=\alpha)$ である。

以上より，放物線 C と 2 接線 l_1 と l_2 とで囲まれる図形の面積 S は，

$$S=\int_1^{\frac{5}{2}}\left\{f(x)-\left(-x+\frac{5}{2}\right)\right\}dx+\int_{\frac{5}{2}}^4\{f(x)-(2x-5)\}dx$$



$$=\int_1^{\frac{5}{2}}\left\{\frac{1}{2}x^2-2x+3-\left(-x+\frac{5}{2}\right)\right\}dx+\int_{\frac{5}{2}}^4\left\{\frac{1}{2}x^2-2x+3-(2x-5)\right\}dx$$

$$=\frac{\left|\frac{1}{2}\right|}{12}(4-1)^3=\frac{3^3}{24}=\frac{9}{8}$$ である。……………………………………(答)

実際には，積分計算をしなくても，$a=\dfrac{1}{2}$，$\beta=4$，$\alpha=1$ より，

面積 S は，面積公式：$S=\dfrac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3$……(＊) から求めればいいんだね。