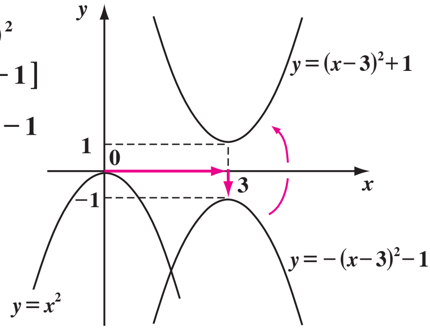
$$y=-x^2 \xrightarrow[\text{平行移動}]{(3,\ -1)\text{だけ}} y+1=-(x-3)^2$$
$$[\,y=-(x-3)^2-1\,]$$
$$\xrightarrow[\text{対称移動}]{x\text{軸に}} -y=-(x-3)^2-1$$

以上より，求める関数は，

$y=(x-3)^2+1$ となるんだね。右に，グラフも示しておいたので，移動の様子がヴィジュアルに分かるはずだ。



● 2次関数の決定には3通りがある！

2次関数の標準形：$y=a(x-p)^2+q$ では，係数 a，p，q の値が決まれば，また，2次関数の一般形：$y=ax^2+bx+c$ では，係数 a，b，c の値が決まれば1つの2次関数が決定されることになるんだね。この2次関数の決定には，次に示す3つの基本パターンがある。

2次関数の決定

次の条件が与えられれば，2次関数 $y=f(x)$ は決定できる。

(i) 頂点の座標 $(p,\ q)$ と $y=f(x)$ が通る1点の座標 $(x_1,\ y_1)$ ← (i) 頂点と通る1点

(ii) 軸 $x=p$ と，$y=f(x)$ が通る2点の座標 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ ← (ii) 軸と通る2点

(iii) $y=f(x)$ が通る3点の座標 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，$(x_3,\ y_3)$ ← (iii) 通る3点

これだけでは，ピンとこないって？当然だね。それぞれ例題を解いて練習していこう。

(*ex*1) 頂点の座標が $(-2,\ 1)$ で，点 $(1,\ -2)$ を通る ← (i) 頂点と通る1点

2次関数を決定しよう。この標準形を，

$y=a(x-p)^2+q$ ……① とおくと，この頂点 $(p,\ q)=(-2,\ 1)$ より，

これを①に代入して，

$y=a\underbrace{(x+2)^2}_{\{x-(-2)\}^2}+1$ ……①′ となる。さらに，①′ は点 $(x,\ y)=(1,\ -2)$

を通るので，これを①′ に代入すると，

$-2=a\underbrace{(1+2)^2}_{3^2=9}+1 \quad -2=9a+1 \quad 9a=-3 \quad \therefore a=-\dfrac{3}{9}=-\dfrac{1}{3}$

これを①´に代入して，この 2 次関数の方程式は，

$y=-\dfrac{1}{3}(x+2)^2+1$ と決定できるんだね。大丈夫？

(ex2) 軸 $x=1$ であり，2 点 $(2,\ 5)$ と $(-1,\ 8)$ を通る ← (ii) 軸と通る 2 点

2 次関数を決定しよう。この標準形を，

$y=a(x-p)+q$ ……②とおくと，この軸 $x=1(=p)$ より，

これを①に代入して，$y=a(x-1)^2+q$ ……②´となる。さらに，

②´は 2 点 $(\underbrace{2}_{x_1},\ \underbrace{5}_{y_1})$ と $(\underbrace{-1}_{x_2},\ \underbrace{8}_{y_2})$ を通るので，これらを②´に代入して，

$$\begin{cases} 5=a(2-1)^2+q \\ 8=a(-1-1)^2+q \end{cases} \text{より，} \begin{cases} 5=a+q & \cdots\cdots③ \\ 8=4a+q & \cdots\cdots④ \end{cases} \text{となる。}$$

④−③より，　$3=3a$　$\therefore x=3a$

これを③に代入して，$5=1+q$　$\therefore q=4$

これらを②´に代入すると，この 2 次関数の方程式は，

$y=1\cdot(x-1)^2+4$ より，$y=(x-1)^2+4$ と決定できるんだね。

これは一般形，$y=x^2-2x+1+4$　$\therefore y=x^2-2x+5$ としてもいいよ。

(ex3) では次，3 点 $(-1,\ -6)$，$(1,\ 4)$，$(2,\ 3)$ を通る ← (iii) 通る 3 点

2 次関数を決定しよう。この通る 3 点の条件の場合，2 次関数は，

一般形：$y=ax^2+bx+c$ ……⑤ を用いて，係数 a，b，c の値を求めることにする。⑤は，3 点 $(\underbrace{-1}_{x_1},\ \underbrace{-6}_{y_1})$，$(\underbrace{1}_{x_2},\ \underbrace{4}_{y_2})$，$(\underbrace{2}_{x_3},\ \underbrace{3}_{y_3})$ を通るので，

これらの座標を⑤に代入すると，

$$\begin{cases} -6=a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c \\ \ \ 4=a\cdot1^2+b\cdot1+c \\ \ \ 3=a\cdot2^2+b\cdot2+c \end{cases} \text{より，} \begin{cases} a-b+c=-6 & \cdots\cdots⑥ \\ a+b+c=4 & \cdots\cdots⑦ \\ 4a+2b+c=3 & \cdots\cdots⑧ \end{cases} \text{となる。}$$

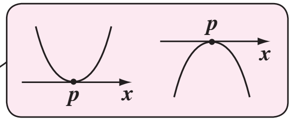
⑦−⑥より，$2b=10$　$\therefore b=5$

⑧−⑦より，$3a+\underbrace{b}_{5}=-1$　$3a=-6$　$\therefore a=-2$

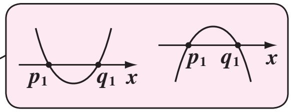
$a=-2$，$b=5$ を⑥に代入して，$-2-5+c=-6$　$\therefore c=-6+7=1$

以上 a，b，c の値を⑤に代入して，$y=-2x^2+5x+1$ が決定される。

これら 3 つのパターン以外にも，たとえば x 軸に接する 2 次関数は，頂点が $(p,\ 0)$ より $y=a(x-p)^2$ とおいて a と p の値を求めればいい。



また，x 軸と $x=p_1,\ q_1$ で交わる 2 次関数は，右図のように $x=p_1,\ q_1$ のときに $y=0$ となるので，$y=a(x-p_1)(x-q_1)$ とおける。そして，a の値を求めて，この 2 次関数を決定すればいいんだね。要領はつかめた？



● 2 次関数の最大・最小問題にもトライしよう！

2 次関数の最大値・最小値については，例題 (c)，(d) (P124) の 2 つの 2 次関数を使って解説しよう。(図 13)

(c) $y=2x^2-4x-1=2(x-1)^2-3$

のグラフから，その y 座標は

$$\begin{cases} x<1 \text{ で減少し，また，} \\ x>1 \text{ で増加し，} \end{cases}$$

丁度 $x=1$ のとき，y 座標は最も小さな値，すなわち“最小値 -3”をとることが分かるね。また，このグラフでは，y 座標はいくらでも大きくなり得るので，この場合，“最大値は存在しない”という。

(d) $y=-x^2-4x-3=-(x+2)^2+1$

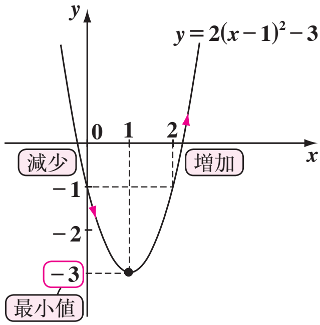
についても，そのグラフから，y 座標は

$$\begin{cases} x<-2 \text{ で増加し，また，} \\ x>-2 \text{ で減少し，} \end{cases}$$

丁度 $x=-2$ のとき，y 座標は最も大きな値，すなわち“最大値 1”をとることが分かるはずだ。また，このグラフの y 座標はどこまでも小さくなり得るので，この場合，“最小値は存在しない”と言えばいいんだよ。

図 13　2 次関数の最大値・最小値

(c) $y=2x^2-4x-1$ の最小値 $=-3$



(d) $y=-x^2-4x-3$ の最大値 $=1$