円に内接する四角形の応用

演習問題 37　難易度 ★★★　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

円に内接する四角形 **ABCD** において，**AB** = **5**，**AD** = **1**，∠**BDC** = **30°**，$\cos\angle\mathrm{BAD} = -\dfrac{3}{5}$ であるとき，次の問いに答えよ。

(1) 線分 **BD** の長さを求めよ。

(2) 線分 **BC** の長さを求めよ。

(3) 四角形 **ABCD** の面積 S を求めよ。　（日本女子大）

ヒント！ 前問に引き続き，円に内接する四角形の問題を解いてみよう。余弦定理，正弦定理や $\cos(180°-\theta)$ の変形など，様々な三角比の公式を利用することにより，解いていこう。

解答＆解説

円に内接する四角形 **ABCD** について，**AB** = **5**，**AD** = **1**，∠**BDC** = **30°** であり，ここで ∠**BAD** = θ とおくと，$\cos\theta = -\dfrac{3}{5}$ また，円に内接する四角形の内対角の和は **180°** より ∠**BCD** = $180° - \theta$ となる。（右図参照）

(1) △**ABD** について，**BD** = x とおいて，余弦定理を用いると，

$$x^2 = 1^2 + 5^2 - 2\cdot1\cdot5\cdot\underbrace{\cos\theta}_{-\frac{3}{5}}$$

$$= 1 + 25 + 6 = 32$$

ここで，**BD** = $x > 0$ より，

$\mathrm{BD} = x = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ ……………………………（答）

(2) △**BCD** について，**BC** = y とおく。

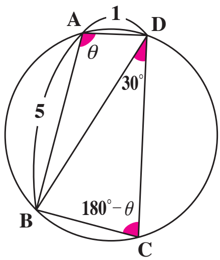
∠**BCD** = $180° - \theta$ より，

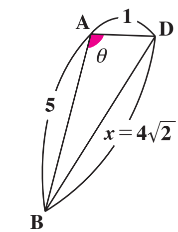
$$\cos(180°-\theta) = -\underbrace{\cos\theta}_{-\frac{3}{5}} = \frac{3}{5}$$

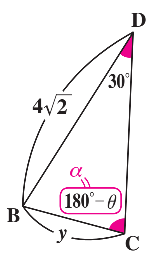
180° が関係しているので，
・cos → cos
・$\theta = 30°$ と考えて，
$\cos(180°-\theta) < 0$
$\therefore \cos(180°-\theta) = -\cos\theta$

よって，$180° - \theta = \alpha$ とおくと，$\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$

ココがポイント







ここで，$0^\circ < \alpha < 180^\circ$ より，$\sin\alpha > 0$

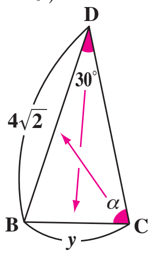
$$\therefore \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

よって，△BCD に正弦定理を用いて，

$$\frac{y}{\sin 30^\circ} = \frac{4\sqrt{2}}{\sin\alpha} \quad \text{より，}$$

$$y = \frac{4\sqrt{2}}{\sin\alpha} \times \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\cancel{4}\sqrt{2}}{\frac{\cancel{4}}{5}} \times \frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$



$$\therefore \mathrm{BC} = y = \frac{5\sqrt{2}}{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

(3) 次に，$\mathrm{CD} = z$ とおいて，△BCD に余弦定理を用いると，

$$(4\sqrt{2})^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 + z^2 - 2 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot z \cdot \cos\alpha$$

$$32 = \frac{25}{2} + z^2 - 5\sqrt{2} \cdot \frac{3}{5} z \quad \leftarrow \boxed{\text{両辺に 2 をかけて}}$$

$$2z^2 - 6\sqrt{2}z - 39 = 0$$

$$z = \frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 2 \times 39}}{2} = \frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{96}}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{2} \pm 4\sqrt{6}}{2} \quad \text{ここで，} z > 0 \text{ より，}$$

$$\mathrm{CD} = z = \frac{3\sqrt{2} + 4\sqrt{6}}{2}$$

以上より，▱ABCD の面積 S は，

$$S = \triangle\mathrm{ABD} + \triangle\mathrm{BCD}$$

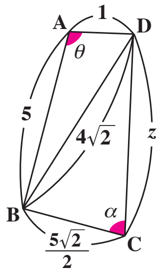
$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 \cdot \underbrace{\sin\theta}_{\frac{4}{5}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2} + 4\sqrt{6}}{2} \cdot \underbrace{\sin\alpha}_{\frac{4}{5}}$$

$$= \frac{\cancel{5}}{2} \times \frac{4}{\cancel{5}} + \frac{\cancel{5}\sqrt{2}(3\sqrt{2} + 4\sqrt{6})}{8} \cdot \frac{4}{\cancel{5}}$$

$$= 2 + \frac{6 + 8\sqrt{3}}{2} = 5 + 4\sqrt{3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

⇦ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
$\sin\alpha > 0$ より，

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{25-9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$



・$\sin\alpha = \frac{4}{5}$，$\cos\alpha = \frac{3}{5}$

・$\cos\theta = -\frac{3}{5}$ で，

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より，$\sin\theta > 0$

$$\therefore \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{\frac{25-9}{25}} = \frac{4}{5}$$

⇦ $S = \triangle\mathrm{ABD} + \triangle\mathrm{BCD}$

$$= \frac{1}{2} \cdot \mathrm{AD} \cdot \mathrm{AB} \cdot \sin\theta + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{BC} \cdot \mathrm{CD} \cdot \sin\alpha$$

$$\left(\sin\theta = \sin\alpha = \frac{4}{5}\right)$$