補充問題 2	難易度 ★★★	2変数関数の定積分

関数 $f(x)=\int_1^e |\log t - x|dt \quad (x \geqq 0)$ を求めよ。

ヒント！ この問題は，元気力アップ問題 **102** の類似問題なので，一緒に解いて練習するといいよ。$f(x)=\int_1^e |\log t - x|dt$ について，これは t での定積分なので，

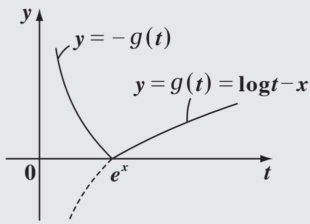
まず，変数　まず，定数扱い　t で積分

積分後，変数

t がまず変数で x は定数とみる。しかし，t での積分が終わると t には e や 1 が代入されてなくなるので，積分終了後には，x の関数 $f(x)$ になるんだね。

ここでまず，$y=g(t)=\log t - x$ とおくと，

$y=\log t$ を，定数 $x(\geqq 0)$ だけ下に引っぱり下げたグラフになる。



$y=0$ のとき，$\log t - x = 0$ より，$\log t = x$

$\therefore t=e^x$(定数) のとき，$y=g(t)$ のグラフは右図に示すように，t 軸と交わる。したがって，

$$y=|g(t)|=\begin{cases} -g(t) & (0<t\leqq e^x) \\ g(t) & (t \geqq e^x) \end{cases}$$

となるので，$y=|g(t)|$ のグラフは上図のようになる。これから，$x \geqq 0$ のとき $e^x \geqq 1$ より，(i) $\underset{e^0}{1} \leqq e^x < \underset{e^1}{e}$ と (ii) $\underset{e^1}{e} \leqq e^x$，すなわち，(i) $0 \leqq x < 1$ と (ii) $1 \leqq x$ の場合分けが必要となることに注意しよう。

解答＆解説

$f(x)=\int_1^e |\log t - x|dt$ ……① $(x \geqq 0)$ について，

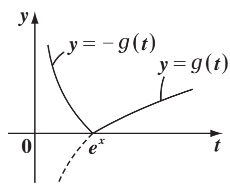
$g(t)=\log t - x$ とおくと，$y=g(t)$ のグラフは右図のように，$t=e^x$ で t 軸と交わり，

(i) $0<t\leqq e^x$ のとき $g(t)\leqq 0$，(ii) $e^x \leqq t$ のとき $g(t) \geqq 0$ より，$y=|g(t)|$ は，

$$y=|g(t)|=\begin{cases} -g(t)=-(\log t - x) & (0<t\leqq e^x \text{ のとき}) \\ g(t)=\log t - x & (e^x \leqq t \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。よって，①の定積分は (i) $0 \leqq x < 1$ と (ii) $1 \leqq x$ の 2 通りに場合分けして調べればよい。

ココがポイント



⇦ (i) $1 \leqq e^x < e$
(ii) $e \leqq e^x$

ここで，$g(t)=\log t-x$ の t での不定積分を $G(t)$ とおくと，

$$G(t)=\int g(t)dt=\int(\log t-\underbrace{x}_{\text{定数扱い}})dt$$

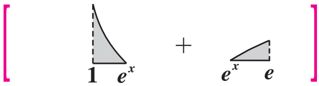
$$=t\log t-t-x\cdot t+\underbrace{C}_{\text{積分定数。今回はこれは不要！}}\ \cdots\cdots②\ \text{となる。}$$

⇦このように，$g(t)$ の不定積分 $G(t)\cdots$②を先に求めておくと便利だ。どうせ，定積分になるので②の定数 C は考えなくてもいい。

積分公式：
$\int \log t\,dt=t\log t-t+C$

(ⅰ) $0\leqq x<1$，すなわち $1\leqq e^x<e$ のとき，

$$f(x)=\int_1^e|g(t)|dt=-\int_1^{e^x}g(t)dt+\int_{e^x}^e g(t)dt$$



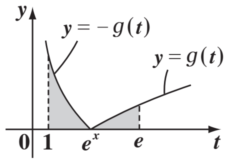
$$=-\Big[G(t)\Big]_1^{e^x}+\Big[G(t)\Big]_{e^x}^e$$

$$=-\{G(e^x)-G(1)\}+G(e)-G(e^x)$$

$$=G(1)+G(e)-2\cdot G(e^x)=-1-x-ex-2\cdot(-e^x)$$

$$=2e^x-(e+1)x-1\ \text{となる。}$$ ← x の関数

⇦(ⅰ) $1\leqq e^x<e$ のとき



⇦②より，(C は無視)

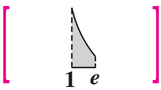
$G(1)=\cancel{1\cdot\log 1}-1-x\cdot 1$
$=-1-x$

$G(e)=e\cdot\underbrace{\log e}_{1}-e-x\cdot e$
$=\cancel{e}-\cancel{e}-xe=-ex$

$G(e^x)=\cancel{e^x\underbrace{\log e^x}_{x}}-e^x-\cancel{x\cdot e^x}$
$=-e^x$

(ⅱ) $1\leqq x$，すなわち $e\leqq e^x$ のとき，

$$f(x)=\int_1^e|g(t)|dt=-\int_1^e g(t)dt$$

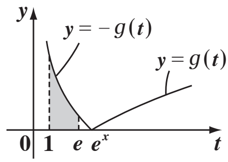


$$=-\Big[G(t)\Big]_1^e=-G(e)+G(1)$$

$$=-(-ex)-1-x$$

$$=(e-1)x-1\ \text{となる。}$$ ← x の関数

⇦(ⅱ) $e\leqq e^x$ のとき



以上(ⅰ)(ⅱ)より，関数 $f(x)$ は次のようになる。

$$f(x)=\begin{cases}2e^x-(e+1)x-1 & (0\leqq x<1\ \text{のとき})\\(e-1)x-1 & (1\leqq x\ \text{のとき})\end{cases}\ \cdots\cdots(\text{答})$$