$\therefore$ 一般項 $a_n = \frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$, $b_n = \frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

が求まったので，それぞれの極限を求めると

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left\{1+\underbrace{\boxed{\left(\frac{1}{3}\right)^n}}_{0}\right\} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$ となるし，

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left\{1-\underbrace{\boxed{\left(\frac{1}{3}\right)^n}}_{0}\right\} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$ となって，答えだ！納得いった？

● 漸化式と数学的帰納法の融合問題も解いてみよう！

では次，漸化式そのものを解いて一般項を求めることはできないんだけれど，数学的帰納法を使って，一般項を求める形の問題についても，次の練習問題で練習しておこう。

練習問題 62	数学的帰納法の応用	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

数列 $\{a_n\}$ が，$a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{n^2-1}{a_n}+3$ ……① $(n=1, 2, 3, \cdots)$ で定義されているとき，次の各問いに答えよ。

(1) a_2，a_3，a_4 の値を求め，一般項 a_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$ を推定し，これが正しいことを，数学的帰納法を用いて示せ。

(2) 極限 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{3n}$ を求めよ。

(1) ①の漸化式を解いて，一般項 a_n を求めることは難しい。ここでは，①に $n=1, 2, 3$ の値を順に代入して，a_2，a_3，a_4 の値を求めよう。その結果，一般項 a_n を推定することができるんだね。そして，この a_n の推定式がすべての自然数 $n=1, 2, 3, \cdots$ について成り立つことを数学的帰納法を用いて示せばいいんだね。**(2)** は，極限の基本問題だね。頑張ろう！

(1) $a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{n^2-1}{a_n}+3$ ……① $(n=1, 2, 3, \cdots)$ について，

(i) $n=1$ のとき，①は，$a_2=\frac{1^2-1}{\underbrace{\boxed{a_1}}_{2}}+3=\cancel{\frac{0}{2}}+3=3$ ……② となる。

(ⅱ) $n=2$ のとき，①は，$a_3=\dfrac{2^2-1}{a_2}+3=\dfrac{4-1}{3}+3=1+3=4$ …③ となる。

a_2 … 3 (②より)

(ⅲ) $n=3$ のとき，①は，$a_4=\dfrac{3^2-1}{a_3}+3=\dfrac{9-1}{4}+3=2+3=5$ …④ となる。

a_3 … 4 (③より)

以上より，$a_1=2$，$a_2=3$，$a_3=4$，$a_4=5$ となるので，一般項 a_n は，
$a_n=n+1$ ……(＊)　($n=1, 2, 3, \cdots$) と推定できる。

この (＊) は，a_1, a_2, a_3, a_4 の値から推定したものに過ぎないので，たとえば，$a_{10}=11$ や $a_{200}=201$ となるのか？についてはまだ分からない。この (＊) が，すべての自然数 $n=1, 2, 3, \cdots$ について成り立つことを示すには次の数学的帰納法を利用するんだね。

> 数学的帰納法
> (ⅰ) $n=1$ のとき，(＊) は成り立つ。
> (ⅱ) $n=k$　($k=1, 2, 3, \cdots$) のとき (＊) が成り立つと仮定して，
> $n=k+1$ のときについて調べる。…，$n=k+1$ のときも (＊) は成り立つ。
> 以上 (ⅰ)(ⅱ) より，任意の自然数 n について (＊) は成り立つ。

$n=1, 2, 3, \cdots$ について (＊) が成り立つことを，数学的帰納法により示す。

(ⅰ) $n=1$ のとき，(＊) は $a_1=1+1=2$ となって，成り立つ。

(ⅱ) $n=k$ ($k=1, 2, 3, \cdots$) のとき (＊) が成り立つ，すなわち，
$a_k=k+1$ ……(＊)´ が成り立つと仮定して，$n=k+1$ のときについて調べる。

数学的帰納法は，ドミノ倒し理論なんだね。
(ⅰ) $n=1$ 番目のドミノを倒す。
(ⅱ) $n=k$ 番目のドミノが倒れるとしたら，$n=k+1$ 番目のドミノが倒れることを示す。
以上 (ⅰ)(ⅱ) より，$n=1, 2, 3, \cdots$ 番目のすべてのドミノが倒れることを示したことになるんだね。

①より，$a_{k+1}=\dfrac{k^2-1}{a_k}+3$ ……①´ である。

この①´ に (＊)´ を代入すると，

$$a_{k+1}=\frac{k^2-1}{k+1}+3=\frac{\cancel{(k+1)}(k-1)}{\cancel{k+1}}+3=k-1+3=k+2$$

よって，$a_{k+1}=k+2=(k+1)+1$ となって，
$n=k+1$ のときも $(*)$ は成り立つ。

$a_n=n+1\cdots(*)$ の n に $k+1$ が代入されたもの

以上 (i)(ii) から，数学的帰納法により，任意の自然数 n に対して $(*)$ は成り立つ。これより，一般項 $a_n=n+1$ ……$(*)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ であることが示された。

(2) $(*)$ の一般項の式より，求める極限は，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overset{n+1}{a_n}}{3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\overset{0}{\frac{1}{n}}}{3}=\frac{1}{3}$$ である。

分子・分母を n で割った!

どう？　これで，$a_{n+1}=pa_n+q$ $(p\neq 1, q\neq 0)$ の形の漸化式から一般項 a_n を求め，その極限を求める問題にも，また，対称形の連立漸化式
$\begin{cases} a_{n+1}=pa_n+qb_n \\ b_{n+1}=qa_n+pb_n \end{cases}$ から一般項 a_n と b_n を求め，極限を求める問題にも，さらに，漸化式と数学的帰納法の融合問題にも自信がついただろう？

ここで使われた $F(n+1)=r\cdot F(n)$ から $F(n)=F(1)\cdot r^{n-1}$ へと変形する考え方は，実はもっとさまざまな漸化式を解く上でポイントとなる変形パターンなんだ。だから，これまでの内容をマスターできた人は，**「元気が出る数学 III」** や **「合格！ 数学 III」(マセマ)** で勉強して，さらに腕に磨きをかけていくといいよ。どんな漸化式でも解いて，その極限が求められるようになると，スバラシイからね。

以上で，**「初めから始める数学 III Part1 改訂 8」** の講義はすべて終了です。みんな，本当によく頑張ったね。でも，本格的な数学 III のテーマである“**微分**(びぶん)・**積分**(せきぶん)”は，**Part2** の講義で扱うから，まだまだ気を抜かずに最後まで，やり抜いてほしい。もちろん，マセマは，そんな頑張るキミ達の強い味方だからね。だから，次回は，**Part2** で会おうな！
それまで，みんな元気で…。またキミ達に会えることを楽しみにしてる。
さようなら。

マセマ代表　馬場 敬之(けいし)