補充問題　4	難易度 ★★★	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

関数 $f(x)$ を $f(x)=\frac{1}{4}\{x^2+x-2\log(2x+1)\}$ と定める。次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の $0\leqq x\leqq 2$ における最大値と最小値を求めよ。必要があれば，自然対数の底 e が $2<e<3$ を満たすことを用いてよい。

(2) 曲線 $y=f(x)$　$(0\leqq x\leqq 2)$ の長さを求めよ。　　　　　　　　(弘前大)

ヒント！ (1) $f'(x)$ を求めて，$f'(x)$ の符号に関する本質的な部分に着目して解いていけばいいんだね。自然対数の底 e については，$e\fallingdotseq 2.7$，$e^2\fallingdotseq 7.4$，$e^3\fallingdotseq 20$ の値を覚えておくと問題を解く際に役に立つと思う。(2) 曲線 $y=f(x)$　$(0\leqq x\leqq 2)$ の長さ l は，公式：$l=\int_0^2\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$ を利用して計算していけばいいんだね。

(1) $f(x)=\frac{1}{4}\{x^2+x-2\log(2x+1)\}$

$(0\leqq x\leqq 2)$ を x で微分して，

$f'(x)=\frac{1}{4}\left(2x+1-2\times\frac{2}{2x+1}\right)$ …① より，

$$f'(x)=\frac{1}{4}\times\frac{(2x+1)^2-4}{2x+1}$$

$$=\frac{\overset{(2x+1+2)(2x+1-2)}{(2x+1)^2-2^2}}{4(2x+1)}$$

$$=\frac{(2x+3)(2x-1)}{4(2x+1)}$$

$\oplus$　$(\because 0\leqq x)$

$\widetilde{f'(x)}=\begin{cases}\oplus\\ 0\\ \ominus\end{cases}$

$f'(x)$ の符号に関する本質的な部分

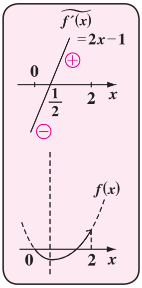
ここで，$0\leqq x\leqq 2$ より，

$\frac{2x+3}{4(2x+1)}>0$ より，$f'(x)$ の符号に関する本質的な部分 $\widetilde{f'(x)}$ は，

$\widetilde{f'(x)}=2x-1$　$(0\leqq x\leqq 2)$ となる。

$f'(x)=0$ のとき，$x=\frac{1}{2}$

よって，$f(x)$　$(0\leqq x\leqq 2)$ の増減表は下のようになる。



増減表

x	0		$\frac{1}{2}$		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	↗	

最小値

よって，$f(x)$　$(0\leqq x\leqq 2)$ は，

(i) $x=\frac{1}{2}$ のとき，

最小値 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-2\log 2\right)$

$$=\frac{1}{16}(3-8\log 2)$$

をとる。

(ii) 次に，最大値を調べる。

$$f(0)=\frac{1}{4}(0-2\cdot\underbrace{\log 1}_{0})=0$$

$$f(2)=\frac{1}{4}(4+2-2\cdot\log5)$$
$$=\frac{1}{2}(3-\log5)$$

ここで，$3=3\cdot\underbrace{\log e}_{1}=\log \underbrace{e^3}_{20}\fallingdotseq\log20$ より，
$3-\log5>0$ となることは明らかだね。
しかし，ここでは $2<e<3$ を利用するように導入されているので，
$\underbrace{\log e^3}_{3}>\log2^3=\log8\quad\therefore\ 3>\log8>\log5$
とすればいい。

ここで，$2<e<3$ より，

$$f(2)=\frac{1}{2}(3-\log5)$$
$$=\frac{1}{2}(\log e^3-\log5)$$
$$>\frac{1}{2}(\log8-\log5)>0=f(0)$$

となる。∴ $x=2$ のとき $f(x)$ は，

最大値 $f(2)=\dfrac{1}{2}(3-\log5)$ をとる。

(i)(ii) より，$f(x)\ (0\leqq x\leqq2)$ は，

$x=2$ のとき，

最大値 $f(2)=\dfrac{1}{2}(3-\log5)$ をとり，

$x=\dfrac{1}{2}$ のとき，

最小値 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{16}(3-8\log2)$ をとる。……………………………(答)

(2) 曲線 $y=f(x)\ (0\leqq x\leqq2)$ の長さを l とおくと，l は，

$l=\displaystyle\int_0^2\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$ …② で求められる。

ここで，被積分関数の$\sqrt{\ }$の中の $1+\{f'(x)\}^2$ を①を用いて変形すると，

$$1+\{f'(x)\}^2=1+\frac{1}{16}\left(2x+1-\frac{4}{2x+1}\right)^2$$

ここで $2x+1=t$ とおくと，$(t\geqq1)$

$$1+\{f'(x)\}^2=1+\underbrace{\frac{1}{16}\left(t-\frac{4}{t}\right)^2}_{\frac{1}{16}\left(t^2-8+\frac{16}{t^2}\right)}$$
$$=\frac{1}{16}\left(16+t^2-8+\frac{16}{t^2}\right)$$
$$=\frac{1}{16}\left(t^2+\underbrace{8}_{2\cdot t\cdot\frac{4}{t}}+\frac{16}{t^2}\right)$$
$$=\frac{1}{16}\left(t+\frac{4}{t}\right)^2\ \cdots\cdots③$$ となる。

③を②に代入して，曲線の長さ l を求めると，

$$l=\int_0^2\sqrt{\frac{1}{16}\underbrace{\left(t+\frac{4}{t}\right)^2}_{\oplus\ (\because\ t\geqq1)}}\,dx$$
$$=\int_0^2\frac{1}{4}\left(t+\frac{4}{t}\right)dx$$

t を $2x+1$ に戻した。

$$=\frac{1}{4}\int_0^2\left(2x+1+2\cdot\frac{2}{2x+1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{4}\Big[x^2+x+2\log(2x+1)\Big]_0^2$$
$$=\frac{1}{4}(4+2+2\log5-0-\underbrace{\cancel{2\log1}}_{0})$$
$$=\frac{1}{2}(3+\log5)$$ となる。……(答)