補充問題 7

難易度 ★★★　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

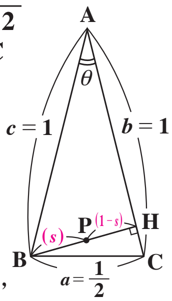
$\mathbf{AB}=\mathbf{1}$，$\mathbf{AC}=\mathbf{1}$，$\mathbf{BC}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ である△**ABC** の頂点 **B** から辺 **AC** に下した垂線と辺 **AC** との交点を **H** とする。

(1) ∠**BAC** を θ と表すとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ。

(2) 実数 s は $0<s<1$ の範囲を動くとする。辺 **BH** を $s:(1-s)$ に内分する点を **P** とするとき，$\mathbf{AP}^2+\mathbf{BP}^2+\mathbf{CP}^2$ の最小値およびそのときの s の値を求めよ。　（東北大）

ヒント！ 平面図形と三角比と 2 次関数の融合問題なので，図を描きながら解いていこう。(1) では△**ABC** に余弦定理を用いて，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ を求めればよい。(2) (1) の結果より **AH** と **BH** の長さが分かる。$\mathbf{BP}=s\cdot\mathbf{BH}$ であり，また，$\mathbf{AP}^2$ と $\mathbf{CP}^2$ は直角三角形の三平方の定理から s の式で表すことができるので，$\mathbf{AP}^2+\mathbf{BP}^2+\mathbf{CP}^2$ は s の 2 次関数になるんだね。

(1) △**ABC** は，$\mathbf{BC}=\dfrac{1}{2}$ $\left(a=\dfrac{1}{2}\right)$，$\mathbf{AB}=\mathbf{AC}=1\ (b=c=1)$ の二等辺三角形である。∠**BAC**$=\theta$ とおいて，△**ABC** に余弦定理を用いると，



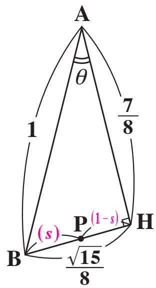
$$\cos\theta=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1^2+1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2\cdot1\cdot1}=\frac{2-\frac{1}{4}}{2}=\frac{7}{8}\ \cdots\cdots①$$

となる。……………………………(答)

$$\therefore\ \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{7}{8}\right)^2}=\sqrt{\frac{64-49}{64}}=\frac{\sqrt{15}}{8}\ \cdots②$$

となる。……………………………(答)

(2) 頂点 **B** から辺 **AC** に下した垂線の足を **H** とおくと，右図に示すように，直角三角形 **ABH** ができる。ここで，



$\mathbf{AB}=1$ より，①，②から，

$$\mathbf{AH}=\cos\theta=\frac{7}{8}$$

$$\mathbf{BH}=\sin\theta=\frac{\sqrt{15}}{8}\ \text{となる。}$$

$$\left(\because\ \cos\theta=\frac{\mathbf{AH}}{\mathbf{AB}},\ \sin\theta=\frac{\mathbf{BH}}{\mathbf{AB}}\right)$$

ここで，点 **P** は線分 **BH** を $s:(1-s)$ に内分するので，

$$\mathbf{BP}=s\cdot\mathbf{BH}=\frac{\sqrt{15}}{8}s$$

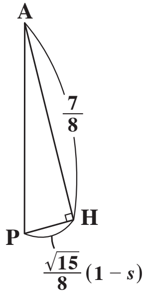
$$\therefore\ \mathbf{BP}^2=\frac{15}{64}s^2\ \cdots\cdots③\ \text{となる。}$$

（ただし，$0<s<1$）

次に，

$$PH = (1-s)\cdot BH = \frac{\sqrt{15}}{8}(1-s)$$

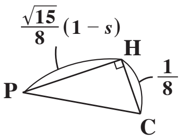
より，直角三角形 APH に三平方の定理を用いて，



$$AP^2 = AH^2 + PH^2 = \frac{49}{64} + \frac{15}{64}(1-s)^2 \quad \cdots\cdots ④$$

となる。さらに，

$$CH = AC - AH = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$$ より，



直角三角形 PCH に三平方の定理を用いて，

$$CP^2 = CH^2 + PH^2 = \frac{1}{64} + \frac{15}{64}(1-s)^2 \quad \cdots\cdots ⑤$$

となる。

以上③，④，⑤より，

$AP^2+BP^2+CP^2$ を s の関数 $f(s)$ $(0<s<1)$ とおくと，

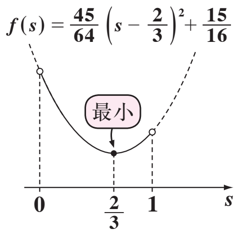
$$f(s) = AP^2 + BP^2 + CP^2$$
$$= \frac{49}{64} + \frac{15}{64}(1-s)^2 + \frac{15}{64}s^2 + \frac{1}{64} + \frac{15}{64}(1-s)^2$$
$$= \frac{15}{64}\{\underbrace{s^2 + 2(1-s)^2}_{s^2+2(s^2-2s+1)=3s^2-4s+2}\} + \frac{25}{32}$$
$$= \frac{15}{64}(\underbrace{3s^2 - 4s + 2}_{3\left(s^2-\frac{4}{3}s+\frac{4}{9}\right)+2-\frac{4}{3}=3\left(s-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}}) + \frac{25}{32}$$
$$= \frac{15}{64}\left\{3\cdot\left(s-\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\right\} + \frac{25}{32}$$

より，

$$f(s) = \frac{45}{64}\left(s-\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{32} + \frac{25}{32}$$
$$= \frac{45}{64}\left(s-\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{15}{16}$$

$(0<s<1)$ となる。

よって $f(s)$，すなわち $AP^2+BP^2+CP^2$ は，$s=\frac{2}{3}$ のとき，最小値：



$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{15}{16}$ をとる。………(答)