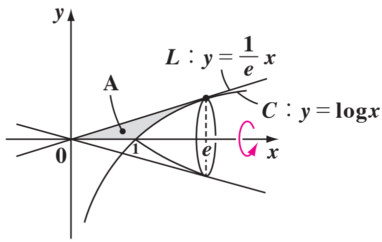
補充問題 2	回転体の体積	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

曲線 C : $y=f(x)=\log x$ と直線 L : $y=g(x)=\frac{1}{e}x$ は，$x=e$ で接する。
曲線 C と直線 L と x 軸とで囲まれる図形を A とおく。
(i) A を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V_1 を求めよ。
(ii) A を y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V_2 を求めよ。

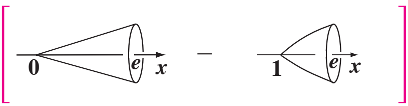
ヒント！ 曲線 C : $y=f(x)$ と直線 L : $y=g(x)$ などの条件は，初めからトライ問題 115(P192) と同じなんだね。今回は C と L と x 軸とで囲まれる図形 A の (i) x 軸のまわりの回転体と，(ii) y 軸のまわりの回転体の体積を求める問題になっている。いずれも，回転体から回転体をくり抜く (差し引く) 形の問題なんだね。

解答＆解説



(i) 曲線 C : $y=f(x)=\log x$ と直線 L : $y=g(x)=\frac{1}{e}x$ と x 軸とで囲まれる図形 A を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V_1 は，

$$V_1=\pi\int_0^e\left(\frac{1}{e}x\right)^2dx-\pi\int_1^e(\log x)^2dx$$



$$=\frac{\pi}{e^2}\underbrace{\int_0^e x^2dx}-\pi\underbrace{\int_1^e x'\cdot(\log x)^2dx}$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^e=\frac{1}{3}[x^3]_0^e$$
$$=\frac{1}{3}(e^3-\cancel{0})$$

$$[x\cdot(\log x)^2]_1^e-\int_1^e\cancel{x}\cdot 2\cdot\log x\cdot\frac{1}{\cancel{x}}dx$$
$$=e(\underbrace{\log e}_{1})^2-\cancel{1\cdot(\underbrace{\log 1}_{0})^2}-2[x\cdot\log x-x]_1^e$$
$$=e-\cancel{2(e\underbrace{\log e}_{1}-e)}+2(\cancel{1\cdot\underbrace{\log 1}_{0}}-1)$$

部分積分
$$\int_1^e f'\cdot g\,dx$$
$$=[f\cdot g]_1^e-\int_1^e f\cdot g'dx$$

公式：
$$\int\log x\,dx=x\log x-x+C$$

よって，

$$V_1 = \frac{\pi}{\cancel{e^2}} \times \frac{e^{\cancel{3}}}{3} - \pi(e-2) = \frac{\pi}{3}(e-3e+6)$$

$$= \frac{\pi}{3}(6-2e) = \frac{2\pi}{3}(3-e) \text{ である。} \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(答)}$$

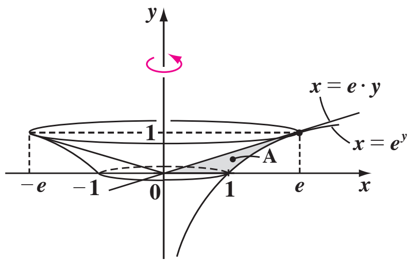
(ii) 曲線 C : $\underline{x = e^y}$ と

$y = \log x$ より

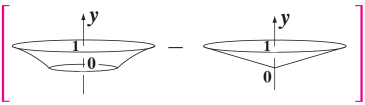
直線 L : $\underline{x = e \cdot y}$ と x 軸とで囲ま

$y = \frac{1}{e}x$ より

れる図形 A を y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V_2 は，



$$V_2 = \pi\int_0^1 (e^y)^2 dy - \pi\int_0^1 (e \cdot y)^2 dy$$



$$= \pi\underbrace{\int_0^1 e^{2y} dy}_{\left[\frac{1}{2}e^{2y}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e^2 - e^0)} - \pi e^2 \underbrace{\int_0^1 y^2 dy}_{\left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}(1^3 - 0) = \frac{1}{3}}$$

$$= \pi \cdot \frac{1}{2}(e^2 - 1) - \pi e^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}e^2 - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}e^2$$

$$= \pi\left(\frac{1}{6}e^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}(e^2 - 3) \text{ である。} \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(答)}$$