(v) $n \equiv 4 \pmod 5$ のとき，←具体的には $n=4, 9, 14, 19, \cdots$ のこと

$n^4 \equiv 4^4 \equiv (\underbrace{4^2}_{16\equiv 1})^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod 5$ より，

n^4 を 5 で割った余りは 1 である。

以上(i)(ii)(iii)(iv)(v)より，「任意の正の整数 n について，n^4 を 5 で割った余りは 0 または 1 のみである」ことが示せたんだね。

これから，どんな正の整数 n であっても n^4 を 5 で割ったとき，その余りは必ず 0 または 1 となるので，余りが 2 や 3 や 4 となることはあり得ないことが分かったんだね。

以上より，

「どんな正の整数 n でも，n^2 を 3 で割った余りは 0 または 1 のみである」こと，および，

「どんな正の整数 n でも，n^4 を 5 で割った余りは 0 または 1 のみである」ことは，合同式による証明法も含めてシッカリ頭に入れておこう！

それでは,この知識を利用して,少し本格的な次の証明問題にチャレンジしてみよう。

(ex) すべての自然数 n に対して，$S_n = n^5 + 4n$ は 5 の倍数となることを証明しよう。まず，具体的に調べてみると，

$n=1$ のとき，$S_1 = 1^5 + 4\times 1 = 5$ となって，5 の倍数だね。

$n=2$ のとき，$S_2 = \underbrace{2^5}_{32} + 4\times 2 = 32 + 8 = 40$ となって，これも 5 の倍数になる。

でも，このように，$n=1, 2, 3, \cdots$と順に調べていたんでは一生かけてもすべての自然数 n に対して，S_n が 5 の倍数であることは証明できない。ここで，合同式を利用することを考えたらいいんだね。今回は，S_n が 5 の倍数となることの証明問題なので，自然数 n をまず 5 で割って，余りが $0, 1, 2, 3, 4$ となる 5 種類の自然数に分類して証明すればよいことに気付くはずだ。すなわち，合同式を使って，

(i) $\underbrace{n \equiv 0 \pmod 5}_{n=5,\,10,\,15,\,20,\,\cdots}$，(ii) $\underbrace{n \equiv 1 \pmod 5}_{n=1,\,6,\,11,\,16,\,\cdots}$，(iii) $\underbrace{n \equiv 2 \pmod 5}_{n=2,\,7,\,12,\,17,\,\cdots}$，

(iv) $\underbrace{n \equiv 3 \pmod 5}_{n=3,\,8,\,13,\,18,\,\cdots}$，(v) $\underbrace{n \equiv 4 \pmod 5}_{n=4,\,9,\,14,\,19,\,\cdots}$ の 5 通りに場合分けして調べよう。

$S_n = n^5 + 4n = n(n^4+4)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が 5 の倍数であることを示そう。

実は，$\underset{n \equiv 0 \ (\text{mod } 5) \text{ のとき}}{\underline{n^4 \equiv 0 \ (\text{mod } 5)}}$，または $\underset{n \equiv 1,\,2,\,3,\,4 \ (\text{mod } 5) \text{ のとき}}{\underline{n^4 \equiv 1 \ (\text{mod } 5)}}$ の知識があると，

・$n \equiv 0$ のとき，$S_n = \underbrace{n}_{0 \ (\text{mod } 5)}(n^4+4) \equiv 0 \ (\text{mod } 5)$ であり，

・$n \equiv 1, 2, 3, 4$ のとき，$S_n = n(\underbrace{n^4}_{1 \ (\text{mod } 5)}+4) \equiv n \times \underbrace{5}_{0 \ (\text{mod } 5)} \equiv 0 \ (\text{mod } 5)$ である。

よって，すべての n の対して，$S_n \equiv 0 \ (\text{mod } 5)$ となって，S_n は 5 の倍数と言えるんだね。でも解答としては，これから示すように $n \equiv 0, 1, 2, 3, 4 \ (\text{mod } 5)$ の 5 通りすべてについて，$S_n \equiv 0 \ (\text{mod } 5)$ を導いていくことにする。

(i) $n \equiv 0 \ (\text{mod } 5)$ のとき，

$S_n = \underbrace{n}_{0}(\underbrace{n^4}_{0}+4) \equiv 0 \times 4 \equiv 0 \ (\text{mod } 5)$ より，S_n は 5 で割り切れる。

$\therefore S_n$ は 5 の倍数である。

(ii) $n \equiv 1 \ (\text{mod } 5)$ のとき，

$S_n = \underbrace{n}_{1}(\underbrace{n^4}_{1}+4) \equiv 1 \times \underbrace{5}_{0} \equiv 1 \times 0 \equiv 0 \ (\text{mod } 5)$ より，

S_n は 5 で割り切れる。

$\therefore S_n$ は 5 の倍数である。

(iii) $n \equiv 2 \ (\text{mod } 5)$ のとき，

$S_n = \underbrace{n}_{2}(\underbrace{n^4}_{2^4}+4) \equiv 2 \times \underbrace{(16+4)}_{20 \equiv 0 \ (\text{mod } 5)} \equiv 2 \times 0 \equiv 0 \ (\text{mod } 5)$ より，

S_n は 5 で割り切れる。

$\therefore S_n$ は 5 の倍数である。

(iv) $n \equiv 3 \ (\text{mod } 5)$ のとき，

$S_n = \underbrace{n}_{3}(\underbrace{n^4}_{3^4}+4) \equiv 3 \times \underbrace{(81+4)}_{85 \equiv 0 \ (\text{mod } 5)} \equiv 3 \times 0 \equiv 0 \ (\text{mod } 5)$ より，

S_n は 5 で割り切れる。

$\therefore S_n$ は 5 の倍数である。

(v) $n \equiv 4 \pmod 5$ のとき，

$$S_n = \underbrace{n}_{4}(\underbrace{n^4}_{4^4}+4) \equiv 4\cdot(\underbrace{4^4}_{(4^2)^2 \equiv 16^2 \equiv 1^2 \equiv 1}+4) \equiv 4\times(1+4) \equiv 4\times 0 \equiv 0 \pmod 5$$ より，

S_n は 5 で割り切れる。

∴ S_n は 5 の倍数である。

以上 (i)〜(v) のすべての場合について，$S_n \equiv 0 \pmod 5$ となるので，すべての自然数 n に対して，$S_n = n^5 + 4n$ は 5 の倍数であることが示せたんだね。

どう？合同式を使うことにより，これまで難しいと思っていた証明問題も，意外とアッサリ解けてしまうことが分かって面白かったでしょう？もちろん，合同式ですべての証明問題が解けるわけではないんだけれど，証明問題に直面したときに，合同式が利用できるかどうか，1 つの有力な手法として検討してみるといいんだね。

では，もう 1 つ合同式を利用する面白いテーマについて解説しよう。

合同式を応用すれば，はるか未来の曜日を決定することもできるんだね。面白そうでしょう。このように，合同式を使えば，様々な問題を解けるようになるんだね。早速，次の例題でチャレンジしてみよう。

(*ex*) 今日は日曜日である。これから，

(i) 10^5 日目が何曜日であるか，調べてみよう。

(ii) 2^{20} 日目が何曜日であるか，調べてみよう。

(iii) 5^{15} 日目が何曜日であるか，調べてみよう。

日曜日である今日から n 日目の曜日について，まず具体的に考えてみよう。

$n=1$ 日目は月曜日，$n=2$ 日目は火曜日，$n=3$ 日目は水曜日，

$n=4$ 日目は木曜日，$n=5$ 日目は金曜日，$n=6$ 日目は土曜日，

$n=7$ 日目は日曜日となり，この後同様のことが繰り返されるんだね。

これを体系立てて列挙してみると，次のようになって，合同式が利用できることが見えてくるんだね。