これらの公式の利用法については，次の練習問題で練習しよう。

練習問題 66　**定積分の計算（Ⅱ）**　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_2^2 (x^3 - x^2 + x - 1)dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^0 (2x^3 - 3x)dx - \int_2^0 (2x^3 - 3x)dx$

(1) は積分区間に注目してくれ。2 から 2 までの定積分なので，計算するまでもないね。(2) は，うまく積分区間をまとめると，計算が簡単になるよ。頑張ろうな！

(1) $\displaystyle\int_2^2 f(x)dx = 0$ より，$\displaystyle\int_2^2 (x^3 - x^2 + x - 1)dx = 0$ となる。超簡単だね！

(2) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^0 (2x^3 - 3x)dx - \underbrace{\int_2^0 (2x^3 - 3x)dx}_{\displaystyle -\int_0^2 (2x^3 - 3x)dx \quad \left(\because \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx\right)}$

積分区間を入れ替えると符号が変わる。

$$= \int_{-\sqrt{2}}^0 (2x^3 - 3x)dx + \int_0^2 (2x^3 - 3x)dx$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^2 \underbrace{(2x^3 - 3x)}_{f(x)}dx$$

公式：

$\displaystyle\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

を使った！ $(a = -\sqrt{2},\ b = 2,\ c = 0)$

$$= \left[2 \cdot \frac{1}{4}x^4 - 3 \cdot \frac{1}{2}x^2\right]_{-\sqrt{2}}^2$$

$$= \Big[\underbrace{\frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2}_{F(x)}\Big]_{-\sqrt{2}}^2 = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 2^4 - \frac{3}{2} \cdot 2^2}_{F(2)} - \Big\{\underbrace{\frac{1}{2}(\overbrace{-\sqrt{2}}^{})^4 - \frac{3}{2}(-\sqrt{2})^2}_{F(-\sqrt{2})}\Big\}$$

$(\sqrt{2})^4 = 2^2 = 4$　　$(\sqrt{2})^2 = 2$

$$= 8 - 6 - (2 - 3) = \cancel{8} - \cancel{6} - \cancel{2} + 3 = 3$$ となって，答えだね。

それでは，最後にもう 1 題，絶対値の付いた被積分関数の定積分の問題を解いてみようか。絶対値が付いているので，当然絶対値内の⊕，⊖（正・負）によって，被積分関数を場合分けして積分計算することになるんだね。

練習問題 67　定積分の計算(Ⅲ)　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

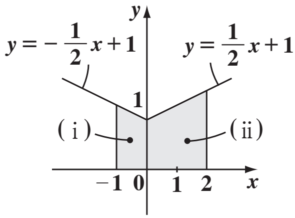
次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left(\frac{1}{2}|x|+1\right)dx$　　　(2) $\displaystyle\int_{0}^{2}|x(x-1)|\,dx$

絶対値の付いた被積分関数なので，積分区間による場合分けが必要となるんだね。今日最後の問題だ。頑張ろう！

(1) $|x|=\begin{cases} x & (x \geqq 0) \\ -x & (x \leqq 0) \end{cases}$　等号は，どちらにも付けても構わない。

$\dfrac{1}{2}|x|+1=\begin{cases} \dfrac{1}{2}x+1 & (x \geqq 0\text{ のとき}) \\ -\dfrac{1}{2}x+1 & (x \leqq 0\text{ のとき}) \end{cases}$ となる。



よって，求める定積分は，右図に示すように，積分区間を(i) $-1 \leqq x \leqq 0$ と (ii) $0 \leqq x \leqq 2$ に分けて計算する。

$$\int_{-1}^{2}\left(\frac{1}{2}|x|+1\right)=\underbrace{\int_{-1}^{0}\left(-\frac{1}{2}x+1\right)dx}_{(\text{i})}+\underbrace{\int_{0}^{2}\left(\frac{1}{2}x+1\right)dx}_{(\text{ii})}$$

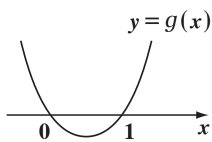
$$=\left[-\frac{1}{4}x^2+x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{4}x^2+x\right]_{0}^{2}$$

$$=0-\left\{-\frac{1}{4}(-1)^2+(-1)\right\}+\left(\frac{1}{4}\cdot 2^2+2\right)-0=-\left(-\frac{1}{4}-1\right)+(1+2)$$

x に 0 を代入したものは 0

$$=\frac{1}{4}+1+1+2=4+\frac{1}{4}=\frac{16+1}{4}=\frac{17}{4}$$ となって答えだ。大丈夫？

(2) $y=g(x)=x(x-1)$ とおくと，このグラフは右図のようになる。よって，$y=g(x)$ は，



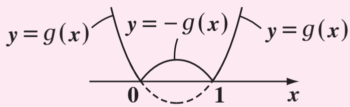
(i) $x \leqq 0$, $1 \leqq x$ のとき，$g(x) \geqq 0$

(ii) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$g(x) \leqq 0$　となる。

よって，$y=|g(x)|$ は次のようになる。

$$y=|g(x)|=\begin{cases} x(x-1) & (x \leqq 0,\ 1 \leqq x \text{ のとき}) \\ -x(x-1) & (0 \leqq x \leqq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

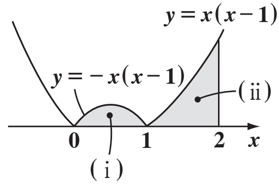
$y=|g(x)|$ のグラフ



$y=|g(x)|$ のグラフは，$y=g(x)$ の x 軸より下側の部分を上に折り返した形になる。

これから，求める定積分は積分区間を(ⅰ)$0 \leqq x \leqq 1$ と(ⅱ) $1 \leqq x \leqq 2$ の 2 通りに場合分けして計算すればいい。

$$\int_0^2 |x(x-1)|dx = \underbrace{-\int_0^1 x(x-1)dx}_{(\text{i})} + \underbrace{\int_1^2 x(x-1)dx}_{(\text{ii})}$$



$$= -\int_0^1 (x^2-x)dx + \int_1^2 (x^2-x)dx$$

$$= -\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2$$

$$= \underbrace{-\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)-0\right\}}_{\boxed{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3-2}{6}=\frac{1}{6}}} + \left(\frac{8}{3}-2\right) \underbrace{-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)}_{\boxed{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}}}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{8}{3} - 2 + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - 2 = \frac{9}{3} - 2$$

$= 3-2=1$ となって，結果が出せたんだね。

これで，絶対値の付いた被積分関数の定積分の問題にも自信がついたでしょう？

以上で“**積分**”の 1 回目の講義は終了です。計算練習が中心だったから，結構疲れただろうね。いいよ，疲れたときはゆっくり休むのが一番だ。そして，元気とやる気が回復したら，よ～く復習しておくんだよ。今日解説した内容が，これから勉強していく，さまざまな積分操作の基礎となるものだからだ。それじゃ，次回また元気で会おうな。さようなら…。