演習問題 31	制限時間 7 分	難易度 ★★	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

(1) t は正の実数であり，$t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}}=-3$ …①を満たすとする。このとき，

$t^{\frac{2}{3}}+t^{-\frac{2}{3}}=\boxed{\text{アイ}}$ である。さらに，

$t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}}=\sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}$，$t-t^{-1}=\boxed{\text{オカキ}}$ である。

(2) x，y は正の実数とする。連立不等式

$$\begin{cases}\log_3(x\sqrt{y})\leqq 5 & \cdots\cdots ② \\ \log_{81}\dfrac{y}{x^3}\leqq 1 & \cdots\cdots\cdots ③\end{cases}$$ について考える。

$X=\log_3x$，$Y=\log_3y$ とおくと，②は，

$\boxed{\text{ク}}\ X+Y\leqq\boxed{\text{ケコ}}$ ……④ と変形でき，③は，

$\boxed{\text{サ}}\ X-Y\geqq\boxed{\text{シス}}$ ……⑤ と変形できる。

X，Y が④と⑤を満たすとき，Y のとり得る最大の整数の値は $\boxed{\text{セ}}$ である。また，x，y が②，③と $\log_3y=\boxed{\text{セ}}$ を同時に満たすとき，x のとり得る最大の整数の値は $\boxed{\text{ソ}}$ である。

ヒント！ (1) は，$t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}}=-3$ の両辺を 2 乗しよう。(2) は，連立の対数不等式だけれど，導入に従って，Xと Yの連立の 1 次不等式として，まず，解いていけばいい。いずれも解き易い問題なので，これらもテンポよく解いていこう。

解答＆解説

(1) $t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}}=-3$ ……① $(t>0)$ の両辺を 2 乗して，

$t^{\frac{2}{3}}+t^{-\frac{2}{3}}-2=9$ $\therefore t^{\frac{2}{3}}+t^{-\frac{2}{3}}=11$ ……(答)(アイ)

次に，$t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}}$ を 2 乗して，

$$\left(t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}}\right)^2=\underbrace{t^{\frac{2}{3}}+t^{-\frac{2}{3}}}_{11}+2\cdot\underbrace{t^{\frac{1}{3}}\cdot t^{-\frac{1}{3}}}_{1}=11+2=13$$

ここで，$t>0$ より，$t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}}>0$

$\therefore t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}}=\sqrt{13}$ ……………………(答)(ウエ)

次に，$t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}}=-3$ ……①の両辺を 3 乗して，

$\left(t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}}\right)^3=-27$

$$t-t^{-1}-3\underbrace{\left(t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}}\right)}_{-3(①より)}=-27$$

ココがポイント

⇦ $\left(t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}}\right)^2=9$

$t^{\frac{2}{3}}-2\cdot\underbrace{t^{\frac{1}{3}}\cdot t^{-\frac{1}{3}}}_{1}+t^{-\frac{2}{3}}=9$

⇦ $\left(t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}}\right)^3$

$=t-3\cdot t^{\frac{2}{3}}\cdot t^{-\frac{1}{3}}+3t^{\frac{1}{3}}\cdot t^{-\frac{2}{3}}-t^{-1}$

$=t-t^{-1}-3\left(t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}}\right)$

$t-t^{-1}+9=-27 \quad \therefore t-t^{-1}=-36$

……(答)(オカキ)

(2) 正の実数 x, y について $\log_3 x=X$, $\log_3 y=Y$ とおくと,

$$\begin{cases} \log_3(x\sqrt{y}) \leqq 5 & \cdots ② \\ \log_{81}\dfrac{y}{x^3} \leqq 1 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$
は,それぞれ次のように変形できる。

$$\begin{cases} X+\dfrac{1}{2}Y \leqq 5 & \cdots\cdots\cdots ②' \\ \dfrac{1}{4}(-3X+Y) \leqq 1 & \cdots ③' \end{cases}$$
となる。よって,②´,③´はさらに,

②´の両辺に2をかけた。

$$\begin{cases} 2X+Y \leqq 10 & \cdots ④ \\ 3X-Y \geqq -4 & \cdots ⑤ \end{cases}$$
④となり,……(答)(ク,ケコ)
⑤となる。……(答)(サ,シス)

③´の両辺に -4 をかけた。

$$\begin{cases} ④より,\ X \leqq \dfrac{10-Y}{2} & \cdots\cdots ④' \\ ⑤より,\ \dfrac{Y-4}{3} \leqq X & \cdots\cdots ⑤' \end{cases}$$
となるので,

$\dfrac{Y-4}{3} \leqq X \leqq \dfrac{10-Y}{2}$ …⑥より,$\dfrac{Y-4}{3} \leqq \dfrac{10-Y}{2}$

これから,$Y \leqq \dfrac{38}{5}=7.6$

よって,Y の取り得る最大の整数値は 7 である。

……(答)(セ)

$Y=7(=\log_3 y)$ のとき,これを⑥に代入して,

$\dfrac{7-4}{3} \leqq X \leqq \dfrac{10-7}{2}$ より,$\underbrace{1}_{\log_3 3} \leqq \underbrace{X}_{\log_3 x} \leqq \underbrace{\dfrac{3}{2}}_{\frac{3}{2}\log_3 3}$

$\log_3 3 \leqq \log_3 x \leqq \log_3 3^{\frac{3}{2}}$

$3 \leqq x \leqq 3^{\frac{3}{2}}=3\underbrace{\sqrt{3}}_{1.73\cdots}=5.19\cdots$

$\therefore x$ の取り得る最大の整数値は 5 である。

……(答)(ソ)

⇦ $\cdot \log_3(x\sqrt{y})=\log_3 x+\log_3 y^{\frac{1}{2}}$
$=\log_3 x+\dfrac{1}{2}\log_3 y$
$=X+\dfrac{1}{2}Y$

$\cdot \log_{81}\dfrac{y}{x^3}=\dfrac{\log_3\dfrac{y}{x^3}}{\underbrace{\log_3 81}_{4}}$
$=\dfrac{1}{4}(\log_3 y-\log_3 x^3)$
$=\dfrac{1}{4}(\log_3 y-3\log_3 x)$
$=\dfrac{1}{4}(Y-3X)$
$=\dfrac{1}{4}(-3X+Y)$

⇦ $2(Y-4) \leqq 3(10-Y)$
$2Y-8 \leqq 30-3Y$
$5Y \leqq 38$
$Y \leqq \dfrac{38}{5}=7.6$

⇦ $a>1$ のとき,
正の数 x_1, x_2 について,
$\log_a x_1 \leqq \log_a x_2$
$\Longleftrightarrow x_1 \leqq x_2$ となる。