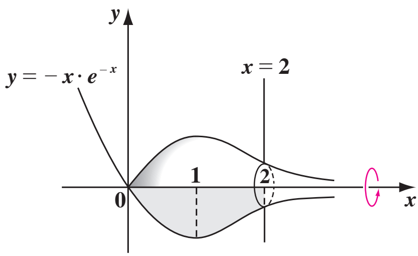
では，さらに骨のある回転体の体積の応用問題にもチャレンジしておこうか？

練習問題 55　回転体の体積(Ⅲ)　CHECK1　CHECK2　CHECK3

曲線 $y=-x\cdot e^{-x}$ と x 軸と直線 $x=2$ とで囲まれる図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

曲線 $y=-x\cdot e^{-x}$ のグラフの概形は練習問題 **34(P133)** で示し，さらにこの曲線と x 軸と直線 $x=2$ とで囲まれる図形の面積は，練習問題 **49(3)(P201)** で求めた。今回はこの同じ図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V を求める問題なので，公式：$V=\pi\int_0^2 y^2dx$ を用いることになるんだね。しかし，この定積分の計算の際，部分積分を **2** 回行わないといけないので，計算が結構大変になるんだね。いい計算練習になるので，是非トライしよう！

曲線 $y=-x\cdot e^{-x}$ と x 軸と直線 $x=2$ とで囲まれる図形を，x 軸のまわりに回転してできる回転体は右図のようになる。



よって，この回転体の体積 V を公式を用いて求めると，

$$V=\pi\int_0^2 \underbrace{y^2}_{(-x\cdot e^{-x})^2=x^2\cdot e^{-2x}}dx$$

x 軸のまわりの回転体の体積計算での被積分関数は πy^2 なので，積分区間 $0\leqq x\leqq 2$ において，$y\leqq 0$ であっても特に気にする必要はないんだね。$y\leqq 0$ でも $y^2\geqq 0$ となるからだ。

$$=\pi\int_0^2 x^2\cdot \underbrace{e^{-2x}}dx$$

$\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)'$ として部分積分にもち込む

$$=\pi\int_0^2 x^2\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)'dx$$

まず，**1** 回目の部分積分の計算 $\int_0^2 f\cdot g'dx=[f\cdot g]_0^2-\int_0^2 f'\cdot gdx$ にもち込む。

$$=\pi\left\{-\frac{1}{2}\left[x^2\cdot e^{-2x}\right]_0^2-\int_0^2 \underbrace{2x}_{(x^2)'}\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)dx\right\}$$

よって，

$$V=\pi\left\{-\frac{1}{2}(2^2\cdot e^{-4}-\cancel{0^2\cdot e^0})+\int_0^2 x\cdot \underbrace{e^{-2x}}_{\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)'}dx\right\}$$

$\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)'$ として，2 回目の部分積分にもち込む。

$\int_0^2 x^2\cdot e^{-2x}dx$ が，$\int_0^2 x\cdot e^{-2x}dx$ となって，少し簡単になったけれど，もう 1 回部分積分する必要がある。

$$=\pi\left\{-2e^{-4}+\underbrace{\int_0^2 x\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)'dx}_{-\frac{1}{2}[x\cdot e^{-2x}]_0^2-\int_0^2 1\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)dx}\right\}$$

部分積分
$\int_0^2 f\cdot g'dx$
$=[f\cdot g]_0^2-\int_0^2 f'\cdot g\,dx$

$$=\pi\left\{-2e^{-4}-\frac{1}{2}\underbrace{[xe^{-2x}]_0^2}_{2\cdot e^{-4}-\cancel{0}}+\frac{1}{2}\underbrace{\int_0^2 e^{-2x}dx}_{-\frac{1}{2}[e^{-2x}]_0^2=-\frac{1}{2}(e^{-4}-\underbrace{e^0}_{1})}\right\}$$

$$=\pi\left\{\underbrace{-2\cdot e^{-4}-e^{-4}-\frac{1}{4}(e^{-4}-1)}_{-3\cdot e^{-4}-\frac{1}{4}e^{-4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}-\left(3+\frac{1}{4}\right)e^{-4}=\frac{1}{4}-\frac{13e^{-4}}{4}}\right\}$$

$=\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{13e^{-4}}{4}\right)=\frac{1-13e^{-4}}{4}\pi$ となって，答えが導けた！

フ～，疲れたって !? そうだね，結構メンドウな積分計算だったからね。今回の積分計算のポイントは，

・1 回目の部分積分で，$\int_0^2 x^2\cdot e^{-2x}dx \longrightarrow \int_0^2 x\cdot e^{-2x}dx$ にし，さらに
・2 回目の部分積分で，$\int_0^2 x\cdot e^{-2x}dx \longrightarrow \int_0^2 e^{-2x}dx$ にして，

積分計算を簡単化していったってことなんだね。

このレベルの定積分が自力でできるようになると実力がさらにパワーアップするから，何度も反復練習して，スラスラ結果が出せるまで練習しよう！