絶対暗記問題 54　難易度 ★★　CHECK1　CHECK2　CHECK3

2つの独立な確率変数 $X=0,\ 3,\ 6,\ 9$ と $Y=0,\ 5,\ 10$ の同時確率分布表を右に示す。

(1) 確率 $P_3,\ Q_3,\ q_{13},\ q_{23},\ q_{31},\ q_{32},\ q_{33},\ q_{43}$ を求めて，右の同時確率分布表を完成させよ。

(2) X と Y の期待値 $E(X)$，$E(Y)$ と分散 $V(X)$，$V(Y)$ を求めよ。また XY の期待値 $E(XY)$ および $X+Y$ の分散 $V(X+Y)$ を求めよ。

X と Y の同時確率分布

X \ Y	0	5	10	計
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	q_{13}	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$	q_{23}	$\frac{1}{3}$
6	q_{31}	q_{32}	q_{33}	P_3
9	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{10}$	q_{43}	$\frac{1}{6}$
計	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	Q_3	1

ヒント！ (1) まず，P_3 と Q_3 を求め，次に X と Y が独立な確率変数であることにより，たとえば，$q_{13}=\frac{1}{4}\times Q_3$，$q_{23}=\frac{1}{3}\times Q_3$，…のように各確率を計算していくことができるんだね。(2) X と Y は独立な確率変数より，公式 $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$ や $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$ を利用して解いていこう。

解答＆解説

(1) 同時確率分布表より，

(ⅰ) $P(X=0)+P(X=3)+P(X=6)+P(X=9)=\boxed{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+P_3+\frac{1}{6}=1}$ (全確率)

よって，$P_3=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=1-\frac{3+4+2}{12}=\frac{12-9}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$ ……(答)

(ⅱ) $P(Y=0)+P(Y=5)+P(Y=10)=\boxed{\frac{1}{5}+\frac{3}{5}+Q_3=1}$ (全確率)

よって，$Q_3=1-\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\right)=1-\frac{1+3}{5}=\frac{5-4}{5}=\frac{1}{5}$ ………………(答)

ここで，X と Y は独立な確率変数より，

$q_{13}=P(X=0,\ Y=10)=P(X=0)\times P(Y=10)=\frac{1}{4}\times Q_3=\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$ となる。

……(答)

以下同様に，

$q_{23} = \frac{1}{3} \times Q_3 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$，$q_{33} = P_3 \times Q_3 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$ …………(答)

$q_{43} = \frac{1}{6} \times Q_3 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{30}$，$q_{31} = P_3 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$ …………(答)

$q_{32} = P_3 \times \frac{3}{5} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{20}$ ……………………………………………(答)

以上より，X と Y の同時確率分布表は右のようになる。

……(答)

X と Y の同時確率分布

X \ Y	0	5	10	計
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$
6	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$
9	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{6}$
計	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

(2) ・X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めると，

$E(X) = \cancel{0 \times \frac{1}{4}} + 3 \times \frac{1}{3} + 6 \times \frac{1}{4} + 9 \times \frac{1}{6}$

$= 1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 4$ ……………(答)

$V(X) = \cancel{0^2 \times \frac{1}{4}} + 3^2 \times \frac{1}{3} + 6^2 \times \frac{1}{4}$

$+ 9^2 \times \frac{1}{6} - 4^2 = 3 + 9 + \frac{27}{2} - 16 = \frac{27}{2} - 4 = \frac{27-8}{2} = \frac{19}{2}$ …(答)

・Y の期待値 $E(Y)$ と分散 $V(Y)$ を求めると，

$E(Y) = \cancel{0 \times \frac{1}{5}} + 5 \times \frac{3}{5} + 10 \times \frac{1}{5} = 3 + 2 = 5$ ……………………………(答)

$V(Y) = \cancel{0^2 \times \frac{1}{5}} + 5^2 \times \frac{3}{5} + 10^2 \times \frac{1}{5} - 5^2 = 15 + 20 - 25 = 10$ ………(答)

次に，X と Y は独立な確率変数より，

$E(XY) = E(X) \cdot E(Y) = 4 \times 5 = 20$ ……………………………………(答)

$V(X+Y) = V(X) + V(Y) = \frac{19}{2} + 10 = \frac{19+20}{2} = \frac{39}{2}$ …………………(答)