補充問題 8　難易度 ★★★　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

$\tan\alpha = 2$, $\tan\beta = 5$, $\tan\gamma = 8$, $0 < \alpha$, β, $\gamma < \dfrac{\pi}{2}$ とする。

(1) $\sin\alpha$ を求めよ。

(2) $\tan(\alpha+\beta+\gamma)$, $\alpha+\beta+\gamma$ を求めよ。

(3) $\beta-\alpha > \gamma-\beta$ となることを示せ。

(4) $\beta > \dfrac{5\pi}{12}$ となることを示せ。　　(お茶の水大)

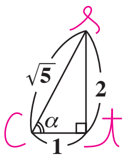
ヒント！ (1) は易しい。(2) は, tan の加法定理：$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ を 2 回利用して, $\tan(\alpha+\beta+\gamma)$ の値を求め, それから $\alpha+\beta+\gamma$ を求める。その際 α, β, γ の取り得る値の範囲を押さえておくことがポイントになる。(3) も $\tan(\beta-\alpha)$ と $\tan(\gamma-\beta)$ の値を求めて, $\beta-\alpha>\gamma-\alpha$ が成り立つことを示す。(4) は (2) と (3) の結果を利用しよう。

(1) $\tan\alpha = 2 \quad \left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$

より, 右図から,

$\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

……(答)



注意

答えは, 明らかだから上記の解答でいいと思うが, 数式でキチンと示すと,

$1+\tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ より,

$\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha} = \dfrac{1}{1+2^2} = \dfrac{1}{5}$

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ より,

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\dfrac{1}{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$= \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ となる。

(2) $\tan\alpha = 2$, $\tan\beta = 5$, $\tan\gamma = 8$

$\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},\ 0<\beta<\dfrac{\pi}{2},\ 0<\gamma<\dfrac{\pi}{2}\right)$

ここで, $\tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ より,

$\dfrac{\pi}{3} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{3} < \beta < \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{3} < \gamma < \dfrac{\pi}{2}$

となる。よって,

$3\times\dfrac{\pi}{3} < \alpha+\beta+\gamma < 3\times\dfrac{\pi}{2}$ より,

$\pi < \alpha+\beta+\gamma < \dfrac{3}{2}\pi$ ……① となる。

ここで, まず, $\tan(\beta+\gamma)$ を求めると,

$\tan(\beta+\gamma) = \dfrac{\tan\beta+\tan\gamma}{1-\tan\beta\cdot\tan\gamma} = \dfrac{5+8}{1-5\times8}$

$= -\dfrac{13}{39} = -\dfrac{1}{3}$ ……②

次に, $\tan(\alpha+\beta+\gamma)$ を求めると,

$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\tan\{\alpha+(\beta+\gamma)\}$

$$=\frac{\overset{2}{\tan\alpha}+\overset{-\frac{1}{3}}{\tan(\beta+\gamma)}}{1-\underbrace{\tan\alpha}_{2}\cdot\underbrace{\tan(\beta+\gamma)}_{-\frac{1}{3}}}=\frac{2-\frac{1}{3}}{1-2\times\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

(②より)

$=\dfrac{6-1}{3+2}=\dfrac{5}{5}=1$……③ となる。

……(答)

ここで，$\pi<\alpha+\beta+\gamma<\dfrac{3}{2}\pi$ …①より，

$\alpha+\beta+\gamma$ は第 **3** 象限の角度である。

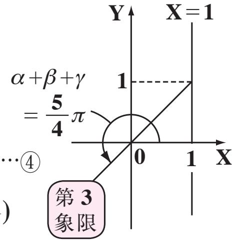
よって，求める

$\alpha+\beta+\gamma$ は，

③より，

$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{5}{4}\pi$ …④

である。……(答)



(3) $-\dfrac{\pi}{6}<\beta-\alpha<\dfrac{\pi}{6}$，$-\dfrac{\pi}{6}<\gamma-\beta<\dfrac{\pi}{6}$ であり，

$\dfrac{\pi}{3}<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{3}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より，

$\underbrace{\dfrac{\pi}{3}}_{最小}-\underbrace{\dfrac{\pi}{2}}_{最大}<\beta-\alpha<\underbrace{\dfrac{\pi}{2}}_{最大}-\underbrace{\dfrac{\pi}{3}}_{最小}$ となる。

$\gamma-\beta$ の範囲についても同様だね。

$$\begin{cases}\tan(\beta-\alpha)=\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\cdot\tan\alpha}=\dfrac{5-2}{1+5\times2}=\dfrac{3}{11}\\[2ex]\tan(\gamma-\beta)=\dfrac{\tan\gamma-\tan\beta}{1+\tan\gamma\cdot\tan\beta}=\dfrac{8-5}{1+8\times5}=\dfrac{3}{41}\end{cases}$$

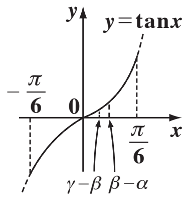
よって，$\tan(\beta-\alpha)>\tan(\gamma-\beta)$ となる。

ここで，$y=\tan x$ $\left(-\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{6}\right)$

は単調増加関数より，

$\beta-\alpha>\gamma-\beta$ …⑤

が成り立つ。…(終)



(4) ⑤より，$2\beta>\alpha+\gamma$……⑤′

⑤′の両辺に β をたすと，

$3\beta>\underbrace{\alpha+\beta+\gamma}_{\frac{5}{4}\pi\ (④より)}$

ここで，$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{5}{4}\pi$ …④より，

$3\beta>\dfrac{5}{4}\pi$

$\therefore\ \beta>\dfrac{5}{12}\pi$ となる。 ……………(終)

(4) の別解

$$\tan\frac{5\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}$$

$=2+\underbrace{\sqrt{3}}_{1.732\cdots}$ となる。よって，

$\tan\beta=5>\tan\dfrac{5}{12}\pi$

$\left(\dfrac{\pi}{3}<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ より，

$\beta>\dfrac{5\pi}{12}$ となる。 ……………………(終)