◆◆ 補充問題 (additional questions) ◆◆

補充問題 1 ● 勾配，発散，回転の応用公式 ●

空間ベクトル場 $\boldsymbol{f} = [y^2z,\ zx^2,\ xy]$，および空間スカラー場 $g(x,\ y,\ z) = x^2y + yz^2$ について，次の各公式が成り立つことを確認せよ。

(1) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{f}) = 0$ ……$(*1)$　　(2) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,g) = \boldsymbol{0}$ ……$(*2)$

(3) $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{f}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{f}) - \Delta\boldsymbol{f}$ ……$(*3)$

ヒント！ 勾配ベクトルの公式：$\mathrm{grad}\,g = \left[\dfrac{\partial g}{\partial x},\ \dfrac{\partial g}{\partial y},\ \dfrac{\partial g}{\partial z}\right]$ や，$\boldsymbol{f} = [f_1,\ f_2,\ f_3]$ についての発散の公式：$\mathrm{div}\boldsymbol{f} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \dfrac{\partial f_2}{\partial y} + \dfrac{\partial f_3}{\partial z}$ などを用いて，解いていこう。(3) の右辺第 2 項の $\Delta\boldsymbol{f}$ は，$\Delta[f_1,\ f_2,\ f_3] = [\Delta f_1,\ \Delta f_2,\ \Delta f_3]$ として計算すればいい。Δ は，ラプラス演算子(ラプラシアン) $\Delta = \nabla\cdot\nabla = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ のことだね。

解答＆解説

(1) $\boldsymbol{f} = [y^2z,\ zx^2,\ xy]$ の回転は，

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{f} = \nabla\times\boldsymbol{f}$$
$$= [x - x^2,\ y^2 - y,\ 2zx - 2yz]$$

rot$\boldsymbol{f}$ の計算

$$\begin{array}{cccc} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ y^2z & zx^2 & xy & y^2z \end{array}$$

$2zx - 2yz]\ [\,x - x^2,\quad y^2 - y,$

よって，この発散は，

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{f}) = \left[\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right]\cdot[x - x^2,\ y^2 - y,\ 2zx - 2yz]$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(x - x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 - y) + \frac{\partial}{\partial z}(2zx - 2yz)$$
$$= (x - x^2)_x + (y^2 - y)_y + (2zx - 2yz)_z$$
$$= \cancel{1} - \cancel{2x} + \cancel{2y} - \cancel{1} + \cancel{2x} - \cancel{2y} = 0 \quad となる。$$

よって，$(*1)$ が成り立つことが確認できた。 ……………………(終)

(2) $g(x, y, z) = x^2y + yz^2$ の勾配ベクトルは，

$$\mathrm{grad}\,g = \nabla g = \left[\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right] = [\underbrace{(x^2y + \cancel{yz^2})_x}_{2xy},\ \underbrace{(x^2y + yz^2)_y}_{x^2+z^2},\ \underbrace{(\cancel{x^2y} + yz^2)_z}_{2yz}]$$

$= [2xy,\ x^2 + z^2,\ 2yz]$ となる。よって，この回転は，

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,g) = \nabla \times \nabla g$$
$$= [2z - 2z,\ 0,\ 2x - 2x]$$
$$= [0,\ 0,\ 0] = \mathbf{0}$$ となる。

rot(grad$g$) の計算

$$\begin{array}{cccc} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ 2xy & x^2+z^2 & 2yz & 2xy \end{array}$$
$$2x - 2x]\ [\ 2z - 2z\ ,\ \ 0 - 0,$$

よって，$(*2)$ が成り立つことが確認できた。……………………(終)

(3) (i) ($(*3)$の左辺) $= \mathrm{rot}(\underbrace{\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}}_{})$

$[x - x^2,\ y^2 - y,\ 2zx - 2yz]$
((1) での計算結果より)

$$= [-2z - 0,\ 0 - 2z,\ 0]$$
$$= -[2z,\ 2z,\ 0]$$ ……① である。

rot(rot$\boldsymbol{f}$) の計算

$$\begin{array}{cccc} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ x - x^2 & y^2 - y & 2zx - 2yz & x - x^2 \end{array}$$
$$0 - 0\ ][-2z - 0\ ,\ \ 0 - 2z,$$

(ii) ($(*3)$の右辺) $= \mathrm{grad}(\underbrace{\mathrm{div}\,\boldsymbol{f}}_{}) - \underbrace{\Delta \boldsymbol{f}}_{}$

$(y^2z)_x + (zx^2)_y + (xy)_z$
$= 0 + 0 + 0 = 0$

$[\Delta(y^2z),\ \Delta(zx^2),\ \Delta(xy)]$

$$= \underbrace{\cancel{\mathrm{grad}(0)}}_{\boxed{\mathbf{0}}} - [\ \underbrace{\Delta(y^2z)}_{},\ \ \underbrace{\Delta(zx^2)}_{},\ \ \underbrace{\Delta(xy)}_{}\ ]$$

$\underbrace{\cancel{(y^2z)_{xx}}}_{0} + \underbrace{(y^2z)_{yy}}_{(2yz)_y = 2z} + \underbrace{\cancel{(y^2z)_{zz}}}_{(y^2)_z = 0}$

$\underbrace{\cancel{(xy)_{xx}}}_{y_x = 0} + \underbrace{\cancel{(xy)_{yy}}}_{x_y = 0} + \underbrace{\cancel{(xy)_{zz}}}_{0}$

$\underbrace{(zx^2)_{xx}}_{(2zx)_x = 2z} + \underbrace{\cancel{(zx^2)_{yy}}}_{0} + \underbrace{\cancel{(zx^2)_{zz}}}_{(x^2)_z = 0}$

$$= -[0 + 2z + 0,\ 2z + 0 + 0,\ 0 + 0 + 0]$$
$$= -[2z,\ 2z,\ 0]$$ ……② である。

以上 (i)(ii) の①，②は，等しいベクトル値関数である。よって，$(*3)$ が成り立つことが確認された。………………………………………………(終)