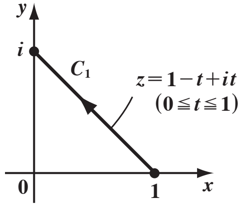
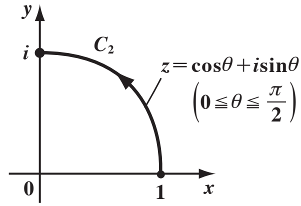
例題 3　次の各積分経路 C_1，C_2 に沿って $\displaystyle\int_{C_k} z^2dz$ $(k=1,\ 2)$ の各積分値を求めてみよう。

(i)



(ii)



(i) 曲線 C_1：点 $1+0\cdot i$ から $0+1\cdot i$ まで，直線的に移動する点 z を媒介変数 t を用いて表すと，

$$z(t)=\underbrace{(1-t)}_{x(t)}+i\cdot\underbrace{t}_{y(t)}\quad(0\leqq t\leqq 1)\quad となる。$$

$\left\{\begin{array}{l} t:0\to 1 \text{ のとき，}\\ z:1\to i \text{ となる。}\end{array}\right.$

ここで，$\dot{z}(t)=\dot{x}(t)+i\cdot\dot{y}(t)=-1+i\cdot 1=-1+i$

以上より，求める積分は，

$$\int_{C_1} z^2\,dz=\int_0^1 \underbrace{\{z(t)\}^2}\cdot\underbrace{\frac{dz}{dt}}_{(-1+i)\,(\text{定数})}dt=\int_0^1\{(1-2t)+(2t-2t^2)i\}\cdot\underbrace{(-1+i)}_{\text{定数}}dt$$

$$\{(1-t)+it\}^2=(1-t)^2+2t\cdot(1-t)\cdot i+i^2\cdot t^2$$
$$=1-2t+\cancel{t^2}\cancel{-t^2}+(2t-2t^2)\cdot i$$
$$=1-2t+(2t-2t^2)\cdot i$$

$$=(-1+i)\int_0^1\{(1-2t)+(2t-2t^2)\cdot i\}dt$$

$$=(-1+i)\cdot\underbrace{\left[(t-t^2)+\left(t^2-\frac{2}{3}t^3\right)\cdot i\right]_0^1}$$

$$(\cancel{1-1})+\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot i-\cancel{0}-\cancel{0\cdot i}=\frac{1}{3}i$$

$$=\frac{1}{3}\cdot i(-1+i)=\frac{1}{3}(i^2-i)=-\frac{1}{3}(1+i)\quad となる。$$

(ii) 曲線 C_2：点 $1+0\cdot i$ から点 $0+1\cdot i$ まで，4 分の 1 円の経路で移動する点 z を媒介変数 θ を用いて表すと，

$$z(\theta)=\cos\theta+i\cdot\sin\theta \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$ となる。

$\theta : 0 \to \frac{\pi}{2}$ のとき，
$z : 1 \to i$ となる。

ここで，
$$\dot{z}(\theta)=\frac{dz(\theta)}{d\theta}=\underbrace{-\sin\theta}_{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}+i\cdot\underbrace{\cos\theta}_{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$$

となる。以上より，求める積分は，

$$\int_{C_2} z^2 dz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\{z(\theta)\}^2}_{(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos2\theta+i\cdot\sin2\theta}\cdot\underbrace{\frac{dz}{d\theta}}_{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{(\cos2\theta+i\sin2\theta)}_{e^{i\cdot2\theta}}\underbrace{\left\{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right\}}_{e^{i\cdot\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{i\cdot2\theta}\cdot e^{i\cdot\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{i\left(3\theta+\frac{\pi}{2}\right)}d\theta$$

$$=\underbrace{e^{\frac{\pi}{2}i}}_{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{i\cdot3\theta}d\theta=i\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos3\theta+i\cdot\sin3\theta)\,d\theta$$

$$=i\underbrace{\left[\frac{1}{3}\sin3\theta-i\cdot\frac{1}{3}\cos3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{\frac{1}{3}\sin\frac{3}{2}\pi-\cancel{\frac{i}{3}\cos\frac{3}{2}\pi}-\cancel{\frac{1}{3}\sin0}+\frac{i}{3}\cos0=-\frac{1}{3}+\frac{i}{3}}=i\left(-\frac{1}{3}+\frac{i}{3}\right)=-\frac{1}{3}(1+i)$$

となる。

これも，被積分関数 $f(z)=z^2$ が正則な関数なので，積分経路によらず同じ積分値をとることが分かったんだね。