この1次元熱伝導方程式の解法により得られる結果は，文字通り温度分布の経時変化の様子を示すものなので，これをグラフで表示することにより，この温度分布が時々刻々に変化していく様子をヴィジュアルにとらえることができて，とても面白いんだね。もちろん，ここでは詳しい解析のやり方を示すことはできないが，例題とその解析の概略と結果のグラフを示してみようと思う。(詳しい解答・解説を希望される方は**「フーリエ解析キャンパス・ゼミ」**で学習されることを勧める。)

それでは，次の例題について解説しよう。

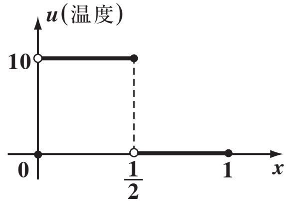
例題　次の偏微分方程式(1次元熱伝導方程式)を解いてみよう。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \cdots\cdots ① \quad (0 < x < 1,\ t > 0)$$ ← $a = 1$ とした。

境界条件：$u(0,\ t) = u(1,\ t) = 0$ ← 放熱条件

初期条件：$u(x,\ 0) = \begin{cases} 10 & \left(0 < x \leqq \frac{1}{2}\right) \\ 0 & \left(\frac{1}{2} < x \leqq 1\right) \end{cases}$

図(i)　初期条件



この例題では，温度伝導率 a を $a = 1$ としている。また，初期条件は図(i)に示す通りだね。初期条件とは，時刻 $t = 0$(秒)における温度分布のことで，今回の問題は，1次元問題なので，図(i)に示すように，x軸上に $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲に置かれた長さ1の棒の温度分布が，$t = 0$ において，$0 < x \leqq \frac{1}{2}$ の範囲では温度 u は10(℃)であり，$\frac{1}{2} < x \leqq 1$ では0(℃)であると言っているんだね。

そして，境界条件とは，この棒の両端点，すなわち $x = 0$ と $x = 1$ における条件のことで，今回 $u(\underbrace{0}_{x},\ t) = u(\underbrace{1}_{x},\ t) = 0$ となっているので，これは，$x = 0$ と $x = 1$ において，時刻 t とは無関係に常に両端点の温度 u は0(℃)に保たれることになる。従って，この両端から熱が流出していくことにな

るので，$t=0$(秒) における上図の初期の温度分布は，時刻の経過と共に，次第に零(ゼロ)分布に近づいていくことになるんだね。このような境界条件のことを“**放熱条件**(ほうねつじょうけん)”という。

> “**放熱条件**”に対する境界条件として，“**断熱条件**(だんねつじょうけん)”がある。これは，両端点の $x=0$ と 1 における温度勾配(こうばい)を 0 とする境界条件のことであり，具体的には，
> $\dfrac{\partial u(0,\ t)}{\partial x}=\dfrac{\partial u(1,\ t)}{\partial x}=0$ ということになる。
> この場合，両端点 $x=0$ と 1 における温度分布の傾きが 0 なので，この両端点において熱の移動は起こらない。すなわち，これは保温状態になっているため，初期条件による温度の初期分布がどのような形状をしていても，時刻の経過と共に，温度分布は一様(いちよう)分布に近づいていくことになるんだね。

それでは，この例題の解答・解説の概略をこれから示そう。ポイントは，温度 $u(x,\ t)$が変数分離できる関数と考えることなんだね。

$\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ……① $(0<x<1,\ t>0)$

における温度 $u(x,\ t)$ が，$X(x)\times T(t)$ のように変数分離して表されるものとすると，

$u(x,\ t)=X(x)\cdot T(t)$ ……②

②を①に代入して，

$X\cdot\dot{T}=X''\cdot T$ 　この両辺を $XT\ (\neq 0)$ で割ると，

$\dfrac{\dot{T}}{T}=\dfrac{X''}{X}$ 　この左辺は t のみ，右辺は x のみの式なので，この等式が恒等的に成り立つためには，これは定数 α でなければならない。これから，次のような 2 つの常微分方程式が得られる。

(Ⅰ) $X''=\alpha X$ ……③ 　(Ⅱ) $\dot{T}=\alpha T$ ……④

(Ⅰ) $X''-\alpha X=0$ ……③ 　について，

　$\alpha\geqq 0$ のときは不適である。

よって，$\alpha < 0$ より，$\alpha = -\omega^2\ (\omega > 0)$ とおくと，

③の特性方程式は，$\lambda^2 + \omega^2 = 0$　　これを解いて，$\lambda = \pm i\omega$

よって，③の基本解は $\cos\omega x$ と $\sin\omega x$ なので，

その一般解は，$X(x) = A_1\cos\omega x + A_2\sin\omega x$ ……⑤　となる。

境界条件より，

$X(0) = A_1 = 0$，$X(1) = \cancel{A_1\cos\omega} + A_2\sin\omega = 0$

よって，$A_1 = 0$，かつ　$\omega = k\pi$　$(k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$　となる。

これを⑤に代入して，$X(x) = A_2\underline{\underline{\sin k\pi x}}$ …⑥ $(k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が導ける。

(Ⅱ) $\dot{T} = \underbrace{\alpha}_{\boxed{-\omega^2 = -k^2\pi^2}} T$ ……④より，　$\dfrac{dT}{dt} = -k^2\pi^2 T$

$\therefore\ T(t) = B_1\underline{\underline{e^{-k^2\pi^2 t}}}$ ……⑦　$(k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ となる。

⑥，⑦の定数係数を除いた積を $u_k(x,\ t)$ とおくと，

$u_k(x,\ t) = \sin k\pi x \cdot e^{-k^2\pi^2 t}$　$(k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

ここで，解の重ね合わせの原理を用いると，①の解は，

$u(x,\ t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \underline{\underline{b_k}}\sin k\pi x \cdot e^{-k^2\pi^2 t}$ …⑧ となる。

⑧より，$u(x,\ 0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\pi x$

ここで，初期条件：$u(x,\ 0) = \begin{cases} 10 & \left(0 < x \leqq \dfrac{1}{2}\right) \\ 0 & \left(\dfrac{1}{2} < x \leqq 1\right) \end{cases}$　より，

フーリエ・サイン級数展開の公式を用いると，

$k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ のとき，

$$\underline{\underline{b_k}} = \frac{2}{1}\int_0^1 u(x,\ 0)\cdot\sin k\pi x dx$$

$$= 2\left(\int_0^{\frac{1}{2}} 10\cdot\sin k\pi x dx + \cancel{\int_{\frac{1}{2}}^1 0\cdot\sin k\pi x dx}\right) = 20\left[-\frac{1}{k\pi}\cos k\pi x\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{20}{k\pi}\left(\cos\frac{k\pi}{2} - 1\right) = \underline{\underline{\frac{20}{k\pi}\left(1 - \cos\frac{k\pi}{2}\right)}} \quad \cdots\cdots ⑨$$

それでは，⑨を⑧に代入することにより，今回の初期条件と境界条件を基に，①の 1 次元熱伝導方程式を解いた結果を示すと，温度 $u(x,\ t)$ は，

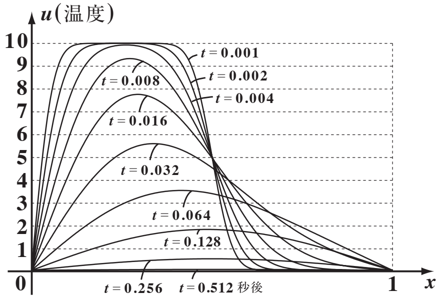
$$u(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\frac{20}{k\pi}\cdot\left(1-\cos\frac{k\pi}{2}\right)}_{b_k}\cdot\sin k\pi x\cdot e^{-k^2\pi^2 t}$$

$$=\frac{20}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos\frac{k\pi}{2}}{k\cdot e^{k^2\pi^2 t}}\sin k\pi x$$

となる。このように，$u(x,\ t)$ は，三角関数や指数関数の無限級数として，表されることになるんだね。もちろん，この無限級数を実際に計算することはできないので，これを近似的に，初めの **60 項**までの和として，

$$u(x,\ t)\fallingdotseq\frac{20}{\pi}\sum_{k=1}^{60}\frac{1-\cos\frac{k\pi}{2}}{k\cdot e^{k^2\pi^2 t}}\sin k\pi x$$

で近似計算する。時刻 t を，$t=0.001$，0.002，0.004，…，0.512(秒) まで変化させたときの温度分布 $u(x,\ t)$ の経時変化の様子を右図に示す。



このグラフから $t=0.512$(秒)後には，この温度分布 $u(x,\ t)$ がほぼ零（ゼロ）分布になってしまうことが分かるんだね。

このように，温度分布の変化の様子を示す，美しいグラフを描けることも，偏微分方程式を解く上での楽しみと言える。これで，皆さんも偏微分方程式について興味をもって頂けたと思う。

また，偏微分方程式の解法といっても，$u(x,\ t)=X(x)\cdot T(t)$ のように，変数分離して，$X(x)$ と $T(t)$ の 2 つの常微分方程式を解く形になっていることも面白かったと思う。

さらに詳しく勉強されたい方は **「フーリエ解析キャンパス・ゼミ」** や **「偏微分方程式キャンパス・ゼミ」** で学習されることを勧める。