● 波束の時間発展を調べよう！

波束を表す関数 $f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin\Delta\kappa x}{x}\cdot\cos\overline{\kappa}x$ ……② に，時刻 t の項は含まれていない。ここで，これを時刻 $t=0$ のときの波動関数 $u(x,\ 0)=f(x)$ と考えることにしよう。したがって，これに時刻 t の要素を加えた波動関数 $u(x,\ t)$ を作ると，これにより波束が時間発展，すなわち移動することになるんだね。一般に，時刻 t を含まない波動関数 $f(\kappa x)$ を時間発展させるためには κx の代わりに $\kappa x-\omega t\ (=\kappa(x-vt))$ とすれば，波動関数 $f(\kappa x)$ が，速度

これは，進行波を表すパターンだね。

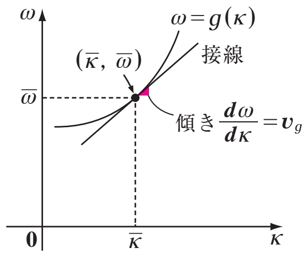
$v\ \left(=\frac{\omega}{\kappa}\right)$ で x 軸の正の向きに進行（移動）することになるんだね。

それでは，波数 κ が，$\overline{\kappa}-\Delta\kappa\leqq\kappa\leqq\overline{\kappa}+\Delta\kappa$ の範囲で変化するとき，ω は近似的にどのように表されるのか考えてみよう。図3に示すように，ω と κ の関係式は，分散がある一般の場合として，ある曲線：

$\omega=g(\kappa)$ で表されるものとする。

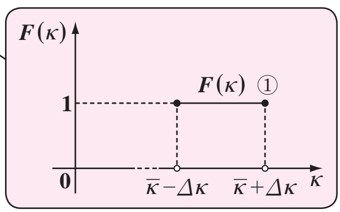
この曲線上の点 $(\overline{\kappa},\ \overline{\omega})$ における接線で，この曲線 $\omega=g(\kappa)$ を近似することにすると，この接線の傾きは，

図3 κ と ω の関係



$\frac{d\omega}{d\kappa}=v_g$（群速度）である。よって，この近似接線は点 $(\overline{\kappa},\ \overline{\omega})$ を通り，傾き v_g の直線なので，$\omega=v_g(\kappa-\overline{\kappa})+\overline{\omega}$ ……③ となるんだね。

よって，前述した波数空間における短形分布 $F(\kappa)=1\ (\overline{\kappa}-\Delta\kappa\leqq\kappa\leqq\overline{\kappa}+\Delta\kappa)$ のフーリエ逆変換の際に，③を考慮に入れた時間発展を表す波動関数 $u(x,\ t)$ を求めると次のようになる。



κx の代わりに，$\kappa x-\omega t$ とした！

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\overline{\kappa}-\Delta\kappa}^{\overline{\kappa}+\Delta\kappa}1\cdot e^{i(\boxed{\kappa x-\omega t})}d\kappa$$

$\omega=v_g\kappa-v_g\overline{\kappa}+\overline{\omega}$ （③より）

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\overline{\kappa}-\Delta\kappa}^{\overline{\kappa}+\Delta\kappa}e^{i\{\kappa x-(\boxed{v_g\kappa-v_g\overline{\kappa}+\overline{\omega}})t\}}d\kappa \quad (③より)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\overline{\kappa}-\Delta\kappa}^{\overline{\kappa}+\Delta\kappa}e^{i\{\kappa(x-v_g t)-(\overline{\omega}-v_g\overline{\kappa})t\}}d\kappa$$

$$=\frac{1}{2\pi}\underbrace{e^{-i(\overline{\omega}-v_g\overline{\kappa})t}}_{\text{変数}\kappa\text{からみて，定数部分}}\int_{\overline{\kappa}-\Delta\kappa}^{\overline{\kappa}+\Delta\kappa}e^{i(x-v_g t)\kappa}d\kappa$$

$$\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-i(\overline{\omega}-v_g\overline{\kappa})t}\cdot\frac{1}{i(x-v_g t)}\left[e^{i(x-v_g t)\kappa}\right]_{\overline{\kappa}-\Delta\kappa}^{\overline{\kappa}+\Delta\kappa}$$

$$=\frac{e^{-i(\overline{\omega}-v_g\overline{\kappa})t}}{\pi(x-v_g t)}e^{i(x-v_g t)\overline{\kappa}}\cdot\underbrace{\frac{e^{i(x-v_g t)\Delta\kappa}-e^{-i(x-v_g t)\Delta\kappa}}{2i}}_{\sin\Delta\kappa(x-v_g t)}$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin\Delta\kappa(x-v_g t)}{x-v_g t}\underbrace{e^{-i(\overline{\omega}t-\cancel{v_g\overline{\kappa}t}-\overline{\kappa}x+\cancel{v_g\overline{\kappa}t})}}_{e^{i(\overline{\kappa}x-\overline{\omega}t)}=\cos(\overline{\kappa}x-\overline{\omega}t)+\cancel{i\sin(\overline{\kappa}x-\overline{\omega}t)}}$$

$u(x,\ t)$ は実数関数より，この純虚数項は無視する。

$$\therefore\ u(x,\ t)=\underbrace{\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin\Delta\kappa(x-v_g t)}{x-v_g t}}_{A(x,\ t)}\cos(\overline{\kappa}x-\overline{\omega}t)\ \cdots\cdots④ \text{ となる。}$$

④について，$A(x,\ t)=\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{\sin\Delta\kappa(x-v_g t)}{x-v_g t}$ とおくと，これは波束を表す波長の長い関数であり，これは群速度 $v_g\left(=\dfrac{d\omega}{d\kappa}\right)$ で進行する。これに対して，$\cos(\overline{\kappa}x-\overline{\omega}t)$ の部分は，波長の短い波動成分を表し，これは，位相速度 $\overline{v}=\dfrac{\overline{\omega}}{\overline{\kappa}}$ で進行することになるんだね。