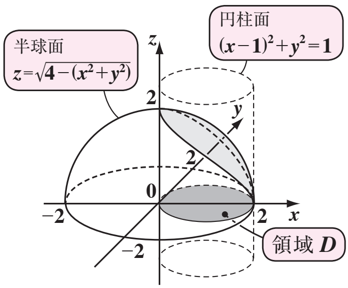
演習問題 35　● 曲面の面積(Ⅳ) ●

曲面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$　$((x-1)^2+y^2\leqq 1)$ の面積を求めよ。

ヒント！ 前問と同じ，半径 **2** の球面の **1** 部の面積を求める問題なので，前半部は演習問題 **34** の解答と同様になる。しかし，今回は領域 D が，$(x-1)^2+y^2\leqq 1$ となるので，計算が異なってくる。ここでも，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ とおいて，極座標に持ち込んで解けばよい。

解答＆解説



半径 **2** の半球面 $z=f(x,\ y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$ の領域 D：$(x-1)^2+y^2=1$　$(z=0)$ における面積 S を求める。

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2}(4-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

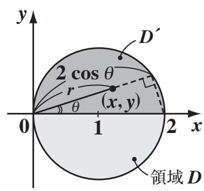
$$f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2}(4-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2y)=-\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

より，求める面積 S は，

$$S=\iint_D\sqrt{(f_x)^2+(f_y)^2+1}\,dxdy=\iint_D\sqrt{\frac{4}{4-x^2-y^2}}\,dxdy$$

$$\frac{x^2}{4-x^2-y^2}+\frac{y^2}{4-x^2-y^2}+1=\frac{4}{4-x^2-y^2}$$

$\therefore\ S=2\iint_D(4-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\,dxdy$ ……① となる。



ここで，$x=r\cdot\cos\theta$，$y=r\cdot\sin\theta$ とおいて，

領域 D：$(x-1)^2+y^2\leqq 1$ を，極座標に変換すると，

$(r\cos\theta-1)^2+r^2\sin^2\theta\leqq 1$　　$r^2-2r\cos\theta+\cancel{1}\leqq\cancel{1}$

$$r^2\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{1}-2r\cos\theta+1=r^2-2r\cos\theta+1$$

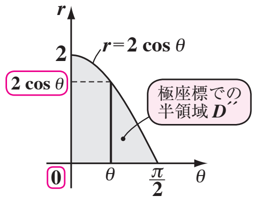
$r(r-2\cos\theta)\leqq 0$ より，

$0\leqq r\leqq 2\cos\theta$　$\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ となる。

領域 D の半分の極座標領域
$$\begin{cases}0\leqq r\leqq 2\cos\theta\\ 0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$
で重積分して，**2** 倍する。

ここで，図形の上下の対称性から，D の上半分の領域 D' のみで重積分して，**2** 倍して面積 S を求めることにする。この極座標での領域をさらに D'' とおくと，

$D'': 0 \leqq r \leqq 2\cos\theta \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ となる。



よって，$S = 2\iint_D (4-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\,dxdy$ ……①

を，次のように極座標に変換して重積分すると，

$$S = 2\times 2\iint_{D''} (4-\underbrace{r^2}_{x^2+y^2=r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)})^{-\frac{1}{2}}\cdot \underbrace{\boxed{r}}_{|J|}\,drd\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^{2\cos\theta} r\cdot(4-r^2)^{-\frac{1}{2}}\,dr\right\}d\theta$$

$$\left\{(4-r^2)^{\frac{1}{2}}\right\}' = \frac{1}{2}(4-r^2)^{-\frac{1}{2}}(-2r) = -r(4-r^2)^{-\frac{1}{2}} \text{ より}$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{-\left[(4-r^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^{2\cos\theta}\right\}d\theta$$

$$= -4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\underbrace{\sqrt{4-4\cos^2\theta}}_{\sqrt{4(1-\cos^2\theta)}=\sqrt{4\sin^2\theta}=2|\sin\theta|=2\sin\theta\ \left(\because\ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\text{ より，}\sin\theta\geqq 0\right)} - \sqrt{4}\right)d\theta$$

$$= -4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin\theta-2)\,d\theta$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)\,d\theta = 8\left[\theta+\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 8\left\{\frac{\pi}{2}+\underbrace{\cancel{\cos\frac{\pi}{2}}}_{0}-(0+\underbrace{\cos 0}_{1})\right\} = 8\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

$= 4(\pi-2)$ ……………………………………………………………………(答)