それでは，もう 1 題，次の例題で，ストークスの定理の問題を解いて，この定理にも慣れてもらうことにしよう。

例題 7　空間ベクトル場 $\boldsymbol{f}=[-2y,\ 3x,\ 0]$ において，xy 平面上に原点を中心とする半径 2 の閉曲線（円）C：$x^2+y^2=4$ $(z=0)$ があり，C に囲まれる xy 平面上の曲面（円）を S とおく。このとき，ストークスの定理：$\displaystyle\iint_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\oint_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$ ……(＊) が成り立つことを確認しよう。ただし，S に対する単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の z 成分は正とする。

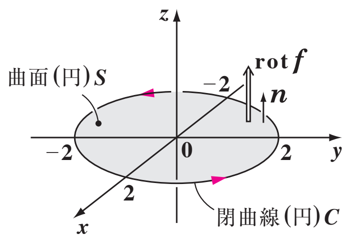
(i) (＊) の左辺について，

空間ベクトル場：

$\boldsymbol{f}=[-2y,\ 3x,\ 0]$ の回転

$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}$ を求めると，

$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}=[0,\ 0,\ 5]$ ……① となる。



$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}$ の計算

$$\begin{array}{cccc} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ -2y & 3x & 0 & -2y \end{array}$$

$3-(-2)]\,[0-0,\quad 0-0,$

また，右上図より，曲面（円）S は xy 平面上の円より，この単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は，$\boldsymbol{n}=[0,\ 0,\ \underbrace{1}_{\oplus}]$ ……② である。よって，①と②の内積を求めると，

$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}=[0,\ 0,\ 5]\cdot[0,\ 0,\ 1]=\cancel{0\times0}+\cancel{0\times0}+5\times1=5$ (定数) となる。

よって，

$$((*)\text{の左辺})=\iint_S \underbrace{\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}}_{5\ (\text{定数})}dS=5\underbrace{\iint_S dS}_{\substack{S\text{ は半径 2 の円より，}\\ \text{この面積は } \pi\cdot 2^2=4\pi}}=5\times4\pi=20\pi\ \text{……③ である。}$$

(ii) (*) の右辺について，

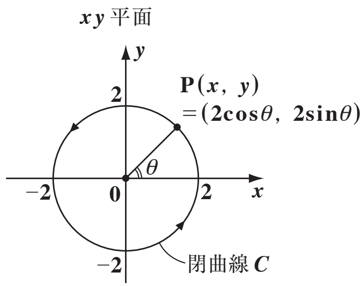
$$\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = [-2y,\ 3x,\ 0]\cdot[dx,\ dy,\ dz] = -2ydx + 3xdy + \cancel{0\cdot dz}$$

$$= -2ydx + 3xdy \quad \cdots\cdots ④$$ となる。

よって，④を (*) の右辺に代入すると，

$$((*)\text{の右辺}) = \oint_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = \oint_C (-2ydx + 3xdy) \quad \cdots\cdots ⑤$$ となる。

ここで，xy 平面上の閉曲線 (円) C は，原点を中心とする半径 2 の円より，x と y は媒介変数 θ を用いて，



$$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases} \quad \cdots\cdots ⑥ \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

とおける。ここで，dx と $d\theta$，および dy と $d\theta$ の関係を求めると，

$$dx = \frac{d(2\cos\theta)}{d\theta}d\theta = -2\sin\theta\cdot d\theta,\quad dy = \frac{d(2\sin\theta)}{d\theta}d\theta = 2\cos\theta\cdot d\theta$$ となる。

よって，⑥とこれらを⑤に代入すると，

$$((*)\text{の右辺}) = \int_0^{2\pi}(-2\cdot\underbrace{2\sin\theta}_{y}\cdot\underbrace{(-2\sin\theta)d\theta}_{dx} + 3\cdot\underbrace{2\cos\theta}_{x}\cdot\underbrace{2\cos\theta d\theta}_{dy})$$

$$= \int_0^{2\pi}(8\cdot\underbrace{\sin^2\theta}_{\frac{1}{2}(1-\cos2\theta)} + 12\cdot\underbrace{\cos^2\theta}_{\frac{1}{2}(1+\cos2\theta)})d\theta$$

半角の公式

$$\begin{cases} \sin^2\theta = \dfrac{1-\cos2\theta}{2} \\ \cos^2\theta = \dfrac{1+\cos2\theta}{2} \end{cases}$$

$$= \int_0^{2\pi}\{4(1-\cos2\theta) + 6(1+\cos2\theta)\}d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}(10 + 2\cos2\theta)d\theta = \left[10\cdot\theta + \sin2\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$= 10\cdot2\pi + \cancel{\sin4\pi} = 20\pi$$ となる。 (i) の結果③と一致する。

以上 (i)(ii) より，(*) のストークスの定理が成り立つことが確認できたんだね。

これで，数学的準備も整ったので，次章から本格的な電磁気学の講義に入ろう。