例題 32　$g(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = 2x_1{}^2 + 2x_2{}^2 + x_3{}^2 + 2x_4{}^2 - 13 = 0$ ……①
$(x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x_3 > 0,\ x_4 > 0)$ の制約条件の下，
$f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4$ ……②の最大値と，
そのときの $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ の値を，ラグランジュの未定乗数法を用いて求めよ。

$g(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = 2x_1{}^2 + 2x_2{}^2 + x_3{}^2 + 2x_4{}^2 - 13 = 0$ ……①
$(x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x_3 > 0,\ x_4 > 0)$ の条件の下で，
$f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4$ ……② の最大値をラグランジュの未定乗数法を用いて求める。

これは，問題文で与えられているので，これに従った。

ここで，未定乗数 α を用いて新たな関数 $h(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ を次のように定義する。

$$h(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) - \alpha \cdot g(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$$
$$= 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - \alpha \cdot (2x_1{}^2 + 2x_2{}^2 + x_3{}^2 + 2x_4{}^2 - 13) \quad \cdots\cdots③$$

$h = f + \alpha \cdot g$ とおいてもよいが，今回は $h = f - \alpha \cdot g$ とおいた方が計算がスッキリできる。

③を，4 つの変数 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ それぞれで偏微分して，0 とおくと，

$$h_{x_1} = \frac{\partial h}{\partial x_1} = \boxed{4 - \alpha \cdot 4x_1 = 0} \qquad \therefore\ x_1 = \frac{4}{4\alpha} = \frac{1}{\alpha} \quad \cdots\cdots④$$

$$h_{x_2} = \frac{\partial h}{\partial x_2} = \boxed{1 - \alpha \cdot 4x_2 = 0} \qquad \therefore\ x_2 = \frac{1}{4\alpha} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots⑤$$

$$h_{x_3} = \frac{\partial h}{\partial x_3} = \boxed{2 - \alpha \cdot 2x_3 = 0} \qquad \therefore\ x_3 = \frac{2}{2\alpha} = \frac{1}{\alpha} \quad \cdots\cdots⑥$$

$$h_{x_4} = \frac{\partial h}{\partial x_4} = \boxed{1 - \alpha \cdot 4x_4 = 0} \qquad \therefore\ x_4 = \frac{1}{4\alpha} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots⑦$$

ここで，$x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x_3 > 0,\ x_4 > 0$ より，④，⑤，⑥，⑦から未定乗数 α は，$\alpha > 0$，すなわち正の定数である。

④，⑤，⑥，⑦を①に代入して，α の値を求めると，

$$2\cdot\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+2\cdot\left(\frac{1}{4\alpha}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+2\cdot\left(\frac{1}{4\alpha}\right)^2-13=0$$

$g(x_1, x_2, x_3, x_4)$
$=2x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_4^2-13=0$ …①
$x_1=\frac{1}{\alpha}$ ……④　$x_2=\frac{1}{4\alpha}$ ……⑤
$x_3=\frac{1}{\alpha}$ ……⑥　$x_4=\frac{1}{4\alpha}$ ……⑦

$$\frac{2}{\alpha^2}+\frac{1}{8\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{8\alpha^2}=13$$

$$\frac{3}{\alpha^2}+\frac{1}{4\alpha^2}=13$$

$$\frac{13}{4\alpha^2}=13 \quad \therefore \alpha^2=\frac{1}{4}$$

ここで，$\alpha>0$ より，$\alpha=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$ ……⑧ となる。

⑧を④，⑤，⑥，⑦に代入して，

$x_1=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$ ……④´，$x_2=\dfrac{1}{4\cdot\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$ ……⑤´

$x_3=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$ ……⑥´，$x_4=\dfrac{1}{4\cdot\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$ ……⑦´

以上④´，⑥´，⑦´，⑧´を

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=4x_1+x_2+2x_3+x_4$ ……②に代入すると，

$f\left(2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)=4\cdot2+\frac{1}{2}+2\cdot2+\frac{1}{2}=13$ となる。

以上より，$g(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$ の条件の下で，$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ は，

$x_1=2$，$x_2=\frac{1}{2}$，$x_3=2$，$x_4=\frac{1}{2}$ のときに，最大値 13 をとることが分かる。

本当は，極値をとる可能性のある組が，$(x_1, x_2, x_3, x_4)=\left(2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)$ であるということだけれど，今回はこの組に対して $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ が最大値となると問題文で示されているので，これに従って解答したんだね。
ちなみに，$x_1<0$，$x_2<0$，$x_3<0$，$x_4<0$ の条件で，同様に解くと $\alpha=-\frac{1}{2}$ となって (x_1, x_2, x_3, x_4) の組が求まり，この組に対して $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ は最大値をとることになる。